COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano e sia dato il quadrato $ABCD$ di vertici $A := (1, 2)$, $B := (4, 6)$, $C := (8, 3)$ e $D := (5, -1)$.

2 (a) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza circoscritta al quadrato $ABCD$ (cioè passante per tutti i vertici del quadrato):

Motivazione:

2 (b) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza inscritta al quadrato $ABCD$ (cioè tangente tutti i lati del quadrato):

Motivazione:

2. Siano dati i tre vettori $\mathbf{u} := (3, 1)$, $\mathbf{v} := (2, 3)$ e $\mathbf{w} := (8, 5)$ di $\mathbb{R}^2$.

2	

(a) Date le condizioni $f(\mathbf{u}) := (2, 5)$, $f(\mathbf{v}) := (3, 3)$, $f(\mathbf{w}) := (1, 4)$:

☐ esiste un unico omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che le soddisfa tutte;
☐ non esiste alcun omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che le soddisfa tutte;
☐ esiste più di un omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che le soddisfa tutte.

Motivazione:

2	

(b) Date le condizioni $g(\mathbf{u}) := (1, 2, 1)$, $g(\mathbf{v}) := (2, 1, 0)$, $g(\mathbf{w}) := (4, 5, 2)$:

☐ esiste un unico omomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che le soddisfa tutte;
☐ non esiste alcun omomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che le soddisfa tutte;
☐ esiste più di un omomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ che le soddisfa tutte.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $f(x,y,z) := (3x+y-5z, 2x+3y-z, x-2z)$.

| 2 | |

(a) Determina una base del nucleo di f.

Motivazione:

| 2 | |

(b) Determina una base dell'immagine di f.

Motivazione:

| 3 | |

(c) Determina una base di $f(\mathbb{R}^3) \cap \ker f$.

Motivazione:

4. Sia data la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & k+1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con k parametro reale.

3	

(a) Per quali valori di k esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}A_kN$ sia una matrice diagonale?

Motivazione:

1	

(b) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

Motivazione:

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

3	

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$D := \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento euclideo siano dati i punti $P := (2, 5)$, $B := (8, -3)$ e la retta $r : 3x + y - 1 = 0$.

| 2 | |

(a) Determina la proiezione ortogonale A di P su r: $\boxed{A = (\quad,\quad)}$

Motivazione:

| 2 | |

(b) Determina il simmetrico C di B rispetto a r: $\boxed{C = (\quad,\quad)}$

Motivazione:

| 3 | |

(c) Determina l'area del triangolo ABC:

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} x \quad + 3z - 1 = 0 \\ \quad y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} x = 2 + \ t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3 - \ t \end{cases}$

2	

(a) Di piani contenenti r e paralleli a s:

☐ non ne esiste nessuno;
☐ ne esiste uno solo: il piano π di equazione cartesiana
☐ ne esiste più di uno.

Motivazione:

2	

(b) Di piani contenenti r e ortogonali a s:

☐ non ne esiste nessuno;
☐ ne esiste uno solo: il piano σ di equazione cartesiana
☐ ne esiste più di uno.

Motivazione:

3	

(c) Le rette r e s sono:

☐ coincidenti ☐ incidenti ☐ parallele e distinte ☐ sghembe

Motivazione: