COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nello spazio un sistema di riferimento affine siano dati i punti $A := (2, 1, 1)$, $B := (3, 2, 4)$, $C := (1, 1, 2)$ e $D := (3, k, 1)$.

2 (a) I punti A, B e C sono allineati?

☐ Sì ☐ No

Motivazione:

2 (b) Determina i valori di k per cui i punti A, B, C e D sono complanari:

Motivazione:

2. Sia dato al variare del parametro reale k il sistema lineare nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} x + ky + 2z = 9 \\ 2x + y + kz = 5k \\ 3x + 2y + 3z = 16 \end{cases}$$

2

(a) Per quali valori di k il sistema ha esattamente una soluzione?

Motivazione:

2

(b) Per quali valori di k la terna $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ è soluzione del sistema?

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia data la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2	

(a) Per quali valori di k la matrice A_k ha -2 come autovalore?

Motivazione:

2	

(b) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

Motivazione:

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

3	

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$D := \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

4. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z, w) := (2x + y - z - w, y + z + w, x + y)$ e sia E_k il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato da $\mathbf{v}_k := (1, 3, k)$.

2 (a) Determina una base del nucleo di f.

Motivazione:

2 (b) Determina una base dell'immagine di f.

Motivazione:

3 (c) Per quali valori di k si ha $\mathbb{R}^3 = f(\mathbb{R}^4) \oplus E_k$?

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine siano dati i punti $A := (3, 1)$, $O := (0, 0)$ e $B := (7, -2)$.

2	

(a) Determina un punto C tale che $AOBC$ sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

$C = (\quad , \quad)$

Motivazione:

2	

(b) Determina il punto M di intersezione delle diagonali del parallelogramma $AOBC$ trovato al punto precedente.

$M := (\quad , \quad)$

Motivazione:

3	

(c) L'insieme dei punti interni al parallelogramma $AOBC$ è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} 2x + 3y \phantom{{}+2z} + 3 = 0 \\ 3x + 5y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

2	

(a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione:

Motivazione:

2	

(b) Il piano σ contenente s e parallelo a r ha equazione:

Motivazione:

3	

(c) La sfera tangente ai piani π e σ ed avente il centro sull'asse delle x ha equazione cartesiana:

Motivazione: