

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  di matrice rappresentativa  $A := \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & 4k \end{pmatrix}$  con  $k$  parametro reale e sia  $\mathbf{v} := (4, 1)$  un vettore di  $\mathbb{R}^2$ .

2	
---	--

(a) Per quali valori di  $k$  il vettore  $\mathbf{v}$  appartiene al nucleo di  $f$ ?

--

Motivazione:

--

2	
---	--

(b) Per quali valori di  $k$  il vettore  $\mathbf{v}$  appartiene all'immagine di  $f$ ?

--

Motivazione:

--

2. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti  $A := (3, 1)$ ,  $B := (5, -3)$  e la retta  $r$  di equazioni parametriche  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \end{cases}$ .

2

- (a) Determina tutti i punti  $C$  sulla retta  $r$  tali che il triangolo  $ABC$  abbia area 10.

Motivazione:

2

- (b) Determina tutti i punti  $D$  sulla retta  $r$  tali che  $AD = BD$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'omomorfismo la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica sia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determina per quali valori  $f_k$  **non** è iniettivo.

Motivazione:

**Scegli uno degli eventuali valori di  $k$  determinati al punto a e utilizzalo nel resto dell'esercizio:**

Valore di  $k$  scelto:

2

(b) Determina una base per  $\ker f_k$ .

Motivazione:

3

(c) Determina una base ortonormale per l'immagine di  $f_k$ .

4. Sia data la matrice:  $A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

3

(a) Determina gli autovalori di  $A$  e una base per ciascun autospazio di  $A$ . Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore $\lambda$	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2

(b) La matrice  $A$  è diagonalizzabile?  Sì  No

Motivazione:

2

(c) Esiste un autovettore di  $A$  appartenente al sottospazio  $E$  generato dai vettori  $\mathbf{u} := (1, 1, 1)$  e  $\mathbf{v} := (1, 2, 3)$ ? Se sì, scrivi un tale vettore, se no spiega perché non esiste.

<input type="checkbox"/> Un autovettore contenuto in $E$ è, ad esempio:	<input type="checkbox"/> Non esiste un autovettore contenuto in $E$ . Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto  $C := (1, 1)$  e la retta  $r : 2x + 3y - 18 = 0$ .

2

- (a) Determina l'equazione della circonferenza  $\gamma_1$  di centro  $C$  e che interseca la retta  $r$  in due punti  $A$  e  $B$  distanti tra loro 4.

Motivazione:

2

- (b) Determina l'equazione della circonferenza  $\gamma_2$  di centro  $C$  e che interseca la retta  $r$  in due punti  $D$  ed  $E$  tale che  $CDE$  sia un triangolo rettangolo in  $C$ .

Motivazione:

3

- (c) Detto  $F$  il punto d'intersezione tra le tangenti a  $\gamma_2$  in  $D$  ed  $E$ , calcola la distanza di  $C$  da  $F$

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il piano  $\pi : x + 2y + z - 10 = 0$

e la retta  $r : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 8 + 3t \\ z = 7 + 2t \end{cases}$ .

2

(a) Determina il punto  $P$  distante  $\sqrt{6}$  dal piano  $\pi$ , appartenente alla retta  $r$  e al semispazio delimitato da  $\pi$  contenente l'origine del sistema di riferimento.

Motivazione:

2

(b) Determina la proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sul piano  $\pi$ .

Motivazione:

3

(c) Determina le equazioni parametriche della retta  $s$  proiezione ortogonale di  $r$  sul piano  $\pi$ .

Motivazione: