

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati i vettori  $\mathbf{u} := (1, 3, 1)$  e  $\mathbf{v} := (2, k, 0)$  di  $\mathbb{R}^3$ .

2

(a) Per quali valori di  $k$  esiste un vettore  $\mathbf{w}$  tale che  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  formano una base di  $\mathbb{R}^3$ ?

Motivazione:

2

(b) Per quali valori di  $k$  esiste un vettore  $\mathbf{z}$  tale che  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{z}$  formano una base ortogonale di  $\mathbb{R}^3$ ?

Motivazione:

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento affine, siano dati i punti  $A := (3, 1, 2)$  e  $B := (4, -2, 3)$ .

2

(a) Stabilire se il segmento di estremi  $A$  e  $B$  interseca il piano  $\pi : 2x + y - 3z + 11 = 0$ .

Sì     No

Motivazione:

2

(b) Stabilire se il segmento di estremi  $A$  e  $B$  interseca la retta  $r : \begin{cases} x + y + 2z - 8 = 0 \\ 2x + y - 3z + 11 = 0 \end{cases}$ .

Sì     No

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da  $f(x, y, z, w) := (2x - 3y + z - w, y + z + w, 2x - 2y + 2z)$  e sia  $E$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  generato da  $\mathbf{u} := (1, 2, 0, 0)$  e  $\mathbf{v} := (0, 1, 0, 1)$ .

2

(a) Determina una base del nucleo di  $f$ .

--

Motivazione:

--

2

(b) Determina una base dell'immagine di  $f$ .

--

Motivazione:

--

3

(c) Determina una base di  $\ker f \cap E$ .

--

Motivazione:

--

4. Sia data la matrice:  $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

2

(a) Determinare gli autovalori di  $A$ .

Motivazione:

3

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di  $A$ . Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore $\lambda$	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2

(c) Determinare una matrice diagonale  $D$  e una matrice invertibile  $M$  tali che  $D = M^{-1}AM$ .

$$D := \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right) \quad M := \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right)$$

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti  $A := (2, 3)$ ,  $B := (6, 5)$  e la retta  $r : 3x + 2y - 7 = 0$ .

2

(a) Determina l'equazione cartesiana della retta  $s$  ortogonale a  $r$  e passante per il punto medio  $M$  di  $A$  e  $B$ .

Motivazione:

3

(b) Determina la distanza di  $A$  da  $s$  e la distanza di  $B$  da  $s$ .

Motivazione:

3

(c) Detto  $C$  il punto d'intersezione tra le rette  $r$  e  $s$  calcola l'area del triangolo  $AMC$ .

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto  $P := (3, 1, 2)$  e il piano  $\pi : x - 2y + 2z - 20 = 0$ .

2  (a) Determina l'equazione della sfera  $S$  centrata in  $P$  e tangente il piano  $\pi$ .

Motivazione:

3  (b) Determina le equazioni di tutti i piani paralleli a  $\pi$  la cui intersezione con  $S$  è una circonferenza di raggio 4.

Motivazione:

2  (c) Determina i centri delle circonferenze di raggio 4 determinate al punto precedente.

Motivazione: