COGNOME..........................NOME..........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati i vettori $\mathbf{v}_1 := (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 := (-1, 0, k)$ e $\mathbf{v}_3 := (1, k, 4)$ di $\mathbb{R}^3$.

2 (a) Per quali valori di k i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

Motivazione:

2 (b) Per quali valori di k esiste un omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 0) = \mathbf{v}_1$, $f(0, 1) = \mathbf{v}_2$ e $f(2, 1) = \mathbf{v}_3$?

Motivazione:

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati l'iperpiano $\pi : 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3 = 0$ e i punti $A := (3, 1, 1, 2)$ e $B := (1, 1, 2, 0)$.

2	

(a) La retta r passante per A e B interseca l'iperpiano π? ☐ Sì ☐ No

Motivazione:

2	

(b) Il segmento di estremi A e B interseca l'iperpiano π? ☐ Sì ☐ No

Motivazione:

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA............

3. Sia dato l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -k & -k \\ 1 & k & k \end{pmatrix}$.

2 (a) Per quali valori di k il nucleo di f_k è generato dal vettore $\mathbf{v} := (0, 1, -1)$?

Motivazione:

3 (b) Per quali valori di k esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

Motivazione:

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

2 (c) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$D :=$ $M :=$

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ così definito $E := \{(x, y, z, w) \mid x + 2y - z + 2w = 0\}$ e sia F il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che ha una base formata dai vettori $\mathbf{u} := (1, 1, 0, 0)$ e $\mathbf{v} := (1, 0, 4, 1)$.

2	

(a) Determina una base per $E \cap F$.

Motivazione:

2	

(b) Determina una base per $E + F$.

Motivazione:

3	

(c) Determina una base ortonormale di F.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (2, 4)$, $B := (1, 7)$ e la retta $r : 3x - 4y + 15 = 0$.

3 | (a) Determina tutti i punti C sulla retta r tali che il triangolo ABC abbia area 5.

Motivazione:

2 | (b) Determina tutti i punti D sulla retta r tali che il triangolo ABD sia isoscele con $AD = BD$.

Motivazione:

2 | (c) Fissato il punto D come alla domanda precedente determina l'equazione cartesiana della bisettrice dell'angolo interno in D del triangolo ABD.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta $r : \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 5 + 2t \\ z = -2 - 4t \end{cases}$ e il piano $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$.

2

(a) Il piano σ contenente r e ortogonale a π ha equazione cartesiana:

Motivazione:

2

(b) La retta s proiezione ortogonale di r sul piano π ha equazioni cartesiane:

Motivazione:

3

(c) Le sfere con centro appartenente a r, tangenti a π e di raggio $\sqrt{6}$ hanno equazioni cartesiane:

Motivazione: