COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati i punti $A := (1, 1, 0, 0)$, $B := (2, 1, 1, 1)$, $C := (1, k, 0, 1)$ e $D := (2, 1, k, 0)$ di $\mathbb{R}^4$ con $k$ parametro reale.

2 (a) Per quali valori di $k$ i punti $A$, $B$ e $C$ sono allineati?

Motivazione:

2 (b) Per quali valori di $k$ i punti $A$, $B$, $C$ e $D$ sono complanari?

Motivazione:

2. Sia dato al variare del parametro reale $k$ il sistema lineare nelle incognite $x$, $y$ e $z$:

$$\begin{cases} 2x + ky + z = k \\ kx + 2y - z = 2 \end{cases}$$

| 2 | |
|---|---|

(a) Per quali valori di $k$ il sistema ha esattamente una soluzione?

Motivazione:

| 2 | |
|---|---|

(b) Per quali valori di $k$ il sistema ha infinite soluzioni?

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo definito da $f(x, y, z) := (2x-2y+2z, x-y+z, y+z, 2x+y+5z)$.

| 2 | |
|---|---|

(a) Determina una base dell'immagine di $f$.

Motivazione:

| 2 | |
|---|---|

(b) Determina una base del nucleo di $f$.

Motivazione:

| 3 | |
|---|---|

(c) Determina una base di un sottospazio vettoriale $E$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $R^4 = f(\mathbb{R}^3) \oplus E$.

Motivazione:

4. Sia data la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $k$ parametro reale.

3 (a) Per quali valori di $k$ esiste una matrice invertibile $N$ tale che $N^{-1}A_kN$ sia una matrice diagonale?

Motivazione:

1 (b) Per quali valori di $k$ esiste una matrice ortogonale $M$ tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

Motivazione:

**Scegliere uno degli eventuali valori di $k$ determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:**

Valore di $k$ scelto:

3 (c) Determina una matrice diagonale $D$ e una matrice ortogonale $M$ tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$D := \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine siano dati i punti $A := (2, 2)$, $B := (4, 5)$ e le rette $r : x - 3y + 4 = 0$ e $s : 2x - y + 3 = 0$. Sia $C$ l'intersezione di $r$ e $s$.

| 2 | |
|---|---|

(a) Determina l'equazione cartesiana della retta passante per $C$ e parallela alla retta passante per $A$ e $B$.

Motivazione:

| 2 | |
|---|---|

(b) Determina un punto $D$ tale che $ABCD$ sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

Motivazione:

| 3 | |
|---|---|

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici $A$, $B$ e $C$ è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il punto $P := (3, 1, 2)$ e il piano $\pi : x + 2y - 2z - 19 = 0$.

| 2 | |
|---|---|

(a) La sfera $S$ di centro $P$ e tangente il piano $\pi$ ha equazione:

Motivazione:

| 2 | |
|---|---|

(b) Il piano $\sigma$ tangente a $S$, parallelo a $\pi$ e distinto da esso ha equazione cartesiana:

Motivazione:

| 3 | |
|---|---|

(c) Detto $H$ il punto di tangenza tra la sfera $S$ e il piano $\pi$, le sfere di raggio 5 la cui intersezione con $\pi$ è la circonferenza $\gamma$ di centro $H$ e di raggio 4 hanno equazione cartesiana:

Motivazione: