

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che rispetto alla base formata dai vettori  $\mathbf{v}_1 := (1, 0)$  e  $\mathbf{v}_2 := (1, 1)$  si rappresenta con la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determinare la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alla base canonica.

Motivazione:

2

(b) Determinare la matrice rappresentativa di  $f$  rispetto alla base formata dai vettori  $\mathbf{u}_1 := (1, 1)$  e  $\mathbf{u}_2 := (1, 0)$  (in quest'ordine).

Motivazione:

2. Siano dati i punti  $A := (1, 2, 1, 0, 1)$  e  $B := (1, 0, 2, 1, 1)$  e l'iperpiano  $\pi : x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 4 = 0$  di  $\mathbb{R}^5$ .

2

- (a) Il segmento aperto di estremi  $A$  e  $B$  interseca l'iperpiano  $\pi$ ?

Sì     No

Motivazione:

2

- (b) La semiretta di origine  $A$  e contenente  $B$  interseca l'iperpiano  $\pi$ ?

Sì     No

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Si consideri il sistema di equazioni 
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y + z = k - 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - z = 1 - k \end{cases}$$
 dove  $k$  è un parametro reale.

2

(a) Determina i valori di  $k$  per cui  $(x, y, z) = (1, 2, 4)$  è soluzione del sistema.

Motivazione:

2

(b) Determina i valori di  $k$  per cui l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ .

Motivazione:

3

(c) Determina i valori di  $k$  per cui il sistema è risolubile.

4. Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'omomorfismo definito da  $f(x, y, z, w) := (x + y + 2w, 2x - 2y + z - 3w, 4x + z + w)$ .

2

(a) Determina una base dell'immagine di  $f$ .

--

Motivazione:

--

2

(b) Determina una base del nucleo di  $f$ .

--

Motivazione:

--

3

(c) Stabilire se esistono due vettori distinti  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  in  $\mathbb{R}^4$  tali che  $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$  e in caso positivo dare due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  siffatti.

--

Motivazione:

--

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano sia dato il punto  $A := (2, h)$  con  $h$  parametro reale e la circonferenza  $\gamma$  di equazione  $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ . Siano  $r$  e  $s$  le due rette tangenti a  $\gamma$  e passanti per  $A$  e siano  $R$  e  $S$  i due punti di tangenza. Sia  $C$  il centro di  $\gamma$ .

2

- (a) Determina i valori di  $h$  per cui almeno una delle due rette  $r$  e  $s$  è parallela alla retta  $t : x - y = 0$ .

Motivazione:

3

- (b) Determina i valori di  $h$  per cui il quadrilatero  $ARCS$  è un quadrato.

Motivazione:

3

- (c) Determina i valori di  $h$  per cui il quadrilatero  $ARCS$  ha area 9.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta  $r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$   
e i punti  $A := (2, 3, -2)$  e  $B := (1, 0, -2)$ .

2

- (a) La retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per  $A$  ha equazioni cartesiane:

Motivazione:

3

- (b) Il piano  $\pi$  parallelo a  $r$  e passante per  $A$  e  $B$  ha equazione:

Motivazione:

2

- (c) La distanza tra il piano  $\pi$  e la retta  $r$  è:

Motivazione: