COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia E uno spazio vettoriale di dimensione 5 e sia F un suo sottospazio vettoriale con una base formata dai vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sia W un suo sottospazio vettoriale con una base formata dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

2 (a) Esiste un omomorfismo $f : E \to V$ il cui nucleo è F e la cui immagine è W?

☐ Sì ☐ No

Motivazione:

2 (b) Esiste un omomorfismo $g : V \to E$ il cui nucleo è W e la cui immagine è F?

☐ Sì ☐ No

Motivazione:

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i punti $A := (1, 1, 0, 0)$, $B := (1, 0, -1, 0)$, $C := (2, 1, 1, 0)$ e $D := (2, 0, 0, k)$.

2	

(a) Per quali valori di k esiste un piano che contiene i punti A, B, C e D?

Motivazione:

2	

(b) Per quali valori di k esiste un iperpiano che contiene i punti A, B, C e D?

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ che rispetto alla base canonica si rappresenta con la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 1 & k & -k-1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{v} := (1, 1, -1)$.

2 (a) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di f_k?

Motivazione:

2 (b) Per quali valori di k l'immagine di f_k ha dimensione 2?

Motivazione:

3 (c) Per quali valori di k esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

Motivazione:

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (1, 2, 0, 0)$ e $\mathbf{v} := (0, 1, 3, 1)$ e sia F il sottospazio vettoriale così definito $F := \{(x, y, z, w) \mid x - y + z = 0, x - z + w = 0\}$.

2	

(a) Determina una base per $E \cap F$.

Motivazione:

2	

(b) Determina una base per $E + F$.

Motivazione:

3	

(c) Stabilire se esiste un vettore non nullo appartenente a F e ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$ e in caso affermativo determinarne uno.

☐ Sì. Un vettore siffatto è: ☐ No

Motivazione:.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (3, 1)$, $B := (1, 7)$ e la retta $r : 2x - 3y + 14 = 0$.

2 (a) Determina un punto C sulla retta r in modo che la mediana passante per C del triangolo ABC sia parallela all'asse x.

Motivazione:

2 (b) Determina un punto D sulla retta r in modo che la mediana passante per A del triangolo ABD sia parallela all'asse y.

Motivazione:

3 (c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (2, 3, 1)$ e il piano $\pi : x + y - z - 10 = 0$.

| 2 | |

(a) La sfera S di centro P e tangente il piano π ha equazione:

Motivazione:

| 2 | |

(b) Sia σ il piano parallelo a π e passante per P. La sfera T che ha il centro su π e che è tangente in P a σ ha equazione:

Motivazione:

| 3 | |

(c) Determina il raggio della circonferenza γ intersezione di S e T:

Motivazione: