

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia  $f$  un endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  che ha 1 e  $-2$  come autovalori.

2

(a) È possibile calcolare la dimensione del nucleo di  $f$ ?

Sì,  $\dim \ker f =$         No, i dati non sono sufficienti

Motivazione:

2

(b) È possibile calcolare il determinante della matrice rappresentativa  $A$  di  $f$  rispetto alla base canonica?

Sì,  $\det A =$         No, i dati non sono sufficienti

Motivazione:

2. In  $\mathbb{R}^5$  siano dati l'iperpiano  $\Pi : x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 1 = 0$  e i punti  $A := (2, 3, 1, 0, 3)$  e  $B := (1, 0, 2, 1, k)$ .

2

- (a) Per quali valori di  $k$  la retta passante per  $A$  e  $B$  è ortogonale all'iperpiano  $\Pi$ ?

Motivazione:

2

- (b) Per quali valori di  $k$  il segmento aperto di estremi  $A$  e  $B$  interseca l'iperpiano  $\Pi$ ?

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia dato in  $\mathbb{R}^4$  il sottospazio vettoriale  $E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$ .

2

(a) Determina una base per  $E$ .

Motivazione:

2

(b) Determina una base ortonormale di  $E$ .

Motivazione:

3

(c) Determina una base per un sottospazio  $F$  supplementare di  $E$  in  $\mathbb{R}^4$ .

Motivazione:

4. Sia  $f_k$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  che rispetto alla base canonica si rappresenta con  $A_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & k & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$   
e sia  $\mathbf{v} := (0, 1, 0)$ .

2

- (a) Per quali valori di  $k$  il vettore  $\mathbf{v}$  appartiene al nucleo di  $f$ ?

Motivazione:

2

- (b) Per quali valori di  $k$  il vettore  $\mathbf{v}$  appartiene all'immagine di  $f$ ?

Motivazione:

3

- (c) Per quali valori di  $k$  l'intersezione tra il nucleo e l'immagine di  $f_k$  contiene vettori non nulli?

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto  $P := (2, 4)$  e la retta  $r : 2x - 3y - 5 = 0$ .

2

(a) La circonferenza  $\gamma$  di centro  $P$  e tangente a  $r$  ha equazione cartesiana:

Motivazione:

2

(b) Detto  $H$  il punto di tangenza tra  $\gamma$  e  $r$ , trovare l'equazione cartesiana della circonferenza  $\delta$ , diversa da  $\gamma$ , avente lo stesso raggio di  $\gamma$  e tangente in  $H$  alla retta  $r$ .

Motivazione:

3

(c) La circonferenza (non degenera, cioè con raggio diverso da 0) centrata in  $H$  e tangente sia alla circonferenza  $\gamma$  che alla circonferenza  $\delta$  ha equazione cartesiana:

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta  $r : \begin{cases} 3x - y + z - 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$   
e i punti  $A := (1, 3, 1)$  e  $B := (2, 4, 1)$ .

2

- (a) La retta  $s$  parallela a  $r$  e passante per  $A$  ha equazioni cartesiane:

Motivazione:

3

- (b) Il piano  $\pi$  parallelo a  $r$  e passante per  $A$  e  $B$  ha equazione:

Motivazione:

2

- (c) La distanza tra il piano  $\pi$  e la retta  $r$  è:

Motivazione: