

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia dato, al variare del parametro reale  $k$ , il sottoinsieme  $E_k$  di  $\mathbb{R}^3$  così definito:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid kx - 2y + 3z = k^2 - 1\}$$

2

(a) Determina i valori di  $k$  per cui  $E_k$  è un sottospazio affine di  $\mathbb{R}^3$ :

Motivazione:

2

(b) Determina i valori di  $k$  per cui  $E_k$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ :

Motivazione:

2. In  $\mathbb{R}^4$  siano dati l'iperpiano  $\Pi : 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2 = 0$  e i punti  $A := (1, 2, 2, 0)$  e  $B := (1, 0, 3, k)$ .

2

(a) Per quali valori di  $k$  i punti  $A$  e  $B$  stanno in semispazi opposti rispetto all'iperpiano  $\Pi$ ?

Motivazione:

2

(b) Per quali valori di  $k$  esiste un iperpiano parallelo a  $\Pi$  e contenente  $A$  e  $B$ ?

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Siano dati in  $\mathbb{R}^4$  i sottospazi vettoriali  $U$ , generato dai vettori  $\mathbf{u}_1 := (1, 2, 0, 1)$  e  $\mathbf{u}_2 := (1, 1, 1, 0)$  e  $V$  generato dai vettori  $\mathbf{v}_1 := (0, 1, 3, 1)$  e  $\mathbf{v}_2 := (3, 4, -2, 1)$ .

3

- (a) Determina una base per  $U \cap V$ .

Motivazione:

2

- (b) Determina una base di  $U + V$ .

Motivazione:

2

- (c) Determina una base per un sottospazio supplementare di  $U + V$  in  $\mathbb{R}^4$ .

Motivazione:

4. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determina una base dell'immagine di  $f$ .

--

Motivazione:

--

2

(b) Determina una base del nucleo di  $f$ .

--

Motivazione:

--

3

(c) Determina una matrice diagonale  $D$  e una matrice ortogonale  $M$  tali che  $D = M^{-1}AM$ .

$D := \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right)$	$M := \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right)$
---	---

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti  $A := (2, 1)$ ,  $B := (6, 4)$  e  $C := (8, 2)$ .

2

- (a) La retta passante per  $A$  e che divide il triangolo  $ABC$  in due parti di area uguale ha equazione cartesiana:

Motivazione:

2

- (b) Determina la disequazione del semipiano contenente  $C$  e delimitato dalla retta passante per  $A$  e  $B$ .

Motivazione:

3

- (c) Detto  $M$  il punto medio di  $B$  e  $C$  e detta  $r$  la retta passante per  $M$  e parallela alla retta passante per  $A$  e  $B$ , determinare il rapporto tra le aree delle due superfici in cui il triangolo  $ABC$  è diviso dalla retta  $r$ .

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il piano  $\pi : 2x - y - 2z + 3 = 0$ , la sfera  $S : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$  e il punto  $A := (1, 0, 0)$ .

2

- (a) I piani tangenti a  $S$  e paralleli a  $\pi$  hanno equazione cartesiana:

Motivazione:

3

- (b) I piani paralleli a  $\pi$  che intersecano  $S$  in una circonferenza di raggio 3 hanno equazione cartesiana:

Motivazione:

3

- (c) Il piano  $\sigma$  passante per  $A$ , ortogonale a  $\pi$  e che interseca  $S$  in una circonferenza di raggio massimo possibile ha equazione cartesiana:

Motivazione: