COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4. Sia E il sottospazio generato da due vettori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ linearmente indipendenti e sia F il sottospazio generato da due vettori $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ linearmente indipendenti.

2 (a) È vero che se $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$ allora E e F sono supplementari in V?

☐ Sì ☐ No ☐ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilirlo.

Motivazione:

2 (b) È vero che se $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ non appartengono a E allora E e F sono supplementari in V?

☐ Sì, sempre ☐ No, mai ☐ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilirlo.

Motivazione:

2. Siano dati i punti $A := (0, 2, 1, 1, 1)$ e $B := (2, 1, 1, 1, 0)$ e l'iperpiano $\pi : x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + k = 0$ di $\mathbb{R}^5$.

2	

(a) Per quali valori di k il segmento aperto di estremi A e B interseca l'iperpiano π?

Motivazione:

2	

(b) Per quali valori di k la semiretta di origine A e contenente B interseca l'iperpiano π?

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (3,1,0,1)$ e $\mathbf{v} := (0,1,3,0)$ e sia F il sottospazio vettoriale così definito $F := \{(x,y,z,w) \mid x-y-z=0, y-z=0\}$.

2	

(a) Determina una base per $E \cap F$.

Motivazione:

2	

(b) Determina una base per $E + F$.

Motivazione:

3	

(c) Determina una base ortonormale di F.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2	

(a) Determina una base del nucleo di f.

Motivazione:

2	

(b) Determina gli autovalori di A con le rispettive molteplicità.

Motivazione:

3	

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (3, 1)$, $B := (5, 5)$ e la retta $r : 3x + 4y - 20 = 0$.

2 (a) Determina le equazioni parametriche dell'asse del segmento AB.

Motivazione:

2 (b) Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti A e B e avente centro sulla retta r.

Motivazione:

3 (c) Detto C il centro della circonferenza trovata al punto precedente, determina l'area del triangolo ABC.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano date le rette $r : \begin{cases} x + 3y + 2z + 2 = 0 \\ x - y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

2	

(a) Il piano π contenente r e parallelo a s ha equazione:

Motivazione:

2	

(b) Il piano σ contenente s e parallelo a r ha equazione:

Motivazione:

3	

(c) La proiezione ortogonale della retta r sul piano σ ha equazioni cartesiane:

Motivazione: