

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $S : AX = B$ un sistema di tre equazioni in quattro incognite.

2

(a) Se $\text{rk } A = 3$, allora il sistema S ha sempre soluzioni? In caso affermativo dimostrarlo; in caso negativo dare un controesempio.

- Sì. Ogni sistema di questo tipo ha almeno una soluzione.
 No. Alcuni sistemi non hanno alcuna soluzione.

Motivazione:

2

(b) Se $\text{rk } A \neq 3$, allora il sistema S non ha mai soluzioni? In caso affermativo dimostrarlo; in caso negativo dare un controesempio.

- Sì, non ci sono mai soluzioni
 No. Alcuni sistemi hanno almeno una soluzione.

Motivazione:

2. Siano dati in \mathbb{R}^4 i punti $P_0 := (2, 0, 0, 0)$, $P_1 := (1, 1, 0, 0)$, $P_2 := (1, 0, 1, 0)$, $P_3 := (1, 0, 0, 1)$

- 2 (a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Π contenente i quattro punti assegnati.

Motivazione:

- 2 (b) Determinare equazioni parametriche della retta Σ passante per $A := (1, 2, 3, 4)$ e ortogonale all'iperpiano Π .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. Si consideri l'endomorfismo f di \mathbb{R}^3 associato alla matrice A relativamente alla base canonica.

2

- (a) L'endomorfismo f è suriettivo? E' iniettivo?

Motivazione:

2

- (b) Sia dato il vettore $\mathbf{v} = (5, k, 15)$. Per quali valori di k si ha che $f^{-1}(\mathbf{v})$ è non vuota?

Motivazione:

3

- (c) Dato $\mathbf{u} = (3, 6, 9)$, determinare $f^{-1}(\mathbf{u})$.

Motivazione:

4. Sia data la matrice $A_k := \begin{pmatrix} 4 & k & 1 \\ 0 & 2 & k-2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3

(a) Per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile?

Motivazione:

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

4

(b) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, 1)$ e $B := (5, 3)$.

2

(a) Determinare equazioni parametriche dell'asse s del segmento AB .

Motivazione:

2

(b) Determinare le coordinate di un punto C tale che il triangolo $\triangle ABC$ sia isoscele di base AB e di area uguale a 5.

Motivazione:

3

(c) Determinare le coordinate del punto C' simmetrico, rispetto al segmento AB , del punto C determinato in (b) e determinare il perimetro del quadrilatero $ACBC'$.

$C' =$, Perimetro =

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, 1, 1)$ e $B := (2, 3, 3)$ del piano $\pi : 2x + 2y - 3z - 1 = 0$.

2 (a) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per A e perpendicolare al piano π .

Motivazione:

3 (b) Determinare un'equazione cartesiana di una sfera S di raggio uguale a $\sqrt{26}$, che passi per B e che intersechi il piano π in una circonferenza di centro A .

Motivazione:

2 (c) Determinare un'equazione cartesiana del piano α tangente alla sfera S nel punto B .

Motivazione: