18 APRILE 2012 - ESAME DI GEOMETRIA - 12 CREDITI
INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2011-2012

COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia E uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. Sia V il sottospazio di E avente come base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4$.

2 (a) Determinare un sottospazio W di E che abbia dimensione uguale a 2 e tale che il sottospazio $V \cap W$ sia di dimensione massima.

Motivazione:

2 (b) Determinare un sottospazio W' di E che abbia dimensione uguale a 2 e tale che il sottospazio $V \cap W'$ sia di dimensione minima.

Motivazione:

2. Siano dati i punti $A := (1, 2, -1, 1)$ e $B := (-1, -2, 1, -1)$ e l'iperpiano $\pi : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$ di $\mathbb{R}^4$.

2	

(a) Stabilire se la retta r passante per i punti A e B è ortogonale all'iperpiano π.

Motivazione:

2	

(b) Stabilire se il segmento AB interseca l'iperpiano π.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Si consideri, al variare del parametro reale k, il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} kx + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ (k+1)x + (k+1)y + (k+1)z = 2 \end{cases}$$

3	

(a) Determinare tutti i valori k per i quali il sistema ha soluzioni.

Motivazione:

2	

(b) Determinare tutte le eventuali soluzioni per $k = 2$.

Motivazione:

2	

(c) Determinare tutte le eventuali soluzioni per $k = 1$.

4. Sia $M(\mathbb{R}, 2, 2)$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 2 a coefficienti reali. Si consideri l'endomorfismo f di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$ che associa ad ogni matrice la sua trasposta.

2	

(a) Determinare la matrice A associata ad f relativamente alla base canonica di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$.

Motivazione:

3	

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2	

(c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice ortogonale invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (\frac{5}{2}, 3)$, $C := (-\frac{1}{2}, -1)$.

2 (a) Determinare le equazioni parametriche dell'asse r del segmento AC.

Motivazione:

4 (b) Determinare due punti B e D appartenenti alla retta r, simmetrici rispetto alla retta passante per A e C, tali che il quadrilatero di vertici consecutivi A, B, C e D abbia area uguale a 25.

Motivazione:

1 (c) Calcolare il perimetro del quadrilatero $ABCD$.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, si consideri il piano $\pi : x + 2y + 3z = 1$, il punto $A := (2, -2, 1)$ e il punto $B := (1, 0, 3)$.

2	

(a) Stabilire se la retta r passante per A e B è perpendicolare al piano π.

Motivazione

3	

(b) Quante sono le rette passanti passanti per A, contenute in π e perpendicolari a r? Determinare equazioni parametriche di una di esse.

Motivazione:

2	

(c) Determinare un punto C sulla retta s tale che il triangolo ABC abbia area uguale a $\sqrt{5}$.

Motivazione: