

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

2

1. (a) Se $A \in M(\mathbb{R}, 2, 2)$ è una matrice simmetrica di ordine 2 e se $M \in O(2)$, allora $C = M^{-1}AM$ è simmetrica? In caso affermativo dimostrarlo; in caso negativo dare un controesempio.

- Sì, è simmetrica
 No. In alcuni casi non è simmetrica.

Motivazione:

2

- (b) Se per $A \in M(\mathbb{R}, 2, 2)$ esiste $M \in GL(\mathbb{R}, 2)$ per cui si ha $M^{-1}AM$ diagonale, allora A è simmetrica? In caso affermativo dimostrarlo; in caso negativo dare un controesempio.

- Sì
 No, in alcuni casi non è simmetrica.

Motivazione:

2. Siano dati in \mathbb{R}^4 i punti $P_0 := (2, 0, 0, 0)$, $P_1 := (1, 1, 0, 0)$, $P_2 := (1, 0, 1, 0)$, $P_3 := (1, 0, 0, 1)$

- 2
- (a) Determinare una disequazione rappresentante il semispazio α contenente l'origine delimitato dall'iperpiano Π contenente i quattro punti assegnati.

α :

Motivazione:

- 2
- (b) Dato il punto $A := (1, 1, 1, 1)$, verificare se il segmento di estremi l'origine e A è contenuto nel semispazio α .

- Sì, è contenuto in α
 No, non è contenuto in α

Motivazione:

3. Sia dato al variare del parametro reale k il sistema lineare nelle incognite x, y e z :

$$\begin{cases} x + 3ky + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 4y + kz = 8k \end{cases}$$

3

(a) Per quali valori di k il sistema ha esattamente una soluzione?

Motivazione:

2

(b) Per $k = 2$ il sistema è risolubile? Se sì, scrivere le soluzioni del sistema, se no, spiegare perché.

<input type="checkbox"/> Il sistema è risolubile. Le soluzioni sono: $\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$	<input type="checkbox"/> Il sistema non è risolubile:
--	---

2

(c) Per $k = \frac{2}{3}$ il sistema è risolubile? Se sì, scrivere le soluzioni del sistema, se no, spiegare perché.

<input type="checkbox"/> Il sistema è risolubile. Le soluzioni sono: $\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$ con t parametro reale.	<input type="checkbox"/> Il sistema non è risolubile:
--	---

4. Sia data la matrice $A_k := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k+2 & 3 & 0 \\ 2 & 2k & 1 \end{pmatrix}$.

3

(a) Per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile?

Motivazione:

Scegli uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

4

(b) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $B := (5, 3)$ sulla retta $r : x - 2y + 1 = 0$ e il punto $A := (6, -4)$.

2

(a) Determina un punto C sulla retta r in modo tale che il triangolo ABC sia isoscele con base BC (cioè $AB = AC$).

$C = (\quad , \quad)$

Motivazione:

3

(b) Il triangolo ABC ha area:

$A(ABC) =$

Motivazione:

3

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A , B e C è definito dal sistema di disequazioni:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (5, 6, -5)$, la retta $r : \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ 6x - y - z + 15 = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi : 2x + 2y - 3z - 3 = 0$.

2

- (a) Il piano σ contenente r e passante per il punto P ha equazione cartesiana:

Motivazione:

2

- (b) Determina la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π .

$$H = (\quad , \quad , \quad)$$

Motivazione:

3

- (c) La sfera tangente in H al piano π e avente il centro sul piano σ ha equazione cartesiana:

Motivazione: