COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ l'iperpiano Σ di equazione $2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 11 = 0$ e il punto $A := (1, 2, 1, 1)$.

2 (a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano passante per il punto A e parallelo all'iperpiano Σ.

Motivazione:

2 (b) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per il punto A e ortogonale all'iperpiano Σ.

Motivazione:

2. Sia dato uno spazio vettoriale V e siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ due suoi vettori. Sia f un endomorfismo di V tale che $\mathbf{v}$ sia un autovettore di f rispetto all'autovalore 3 e $\mathbf{w}$ sia un autovettore di f rispetto all'autovalore 2.

2	

(a) Se $\dim V = 2$, allora f è un isomorfismo?

☐ Sì, sempre ☐ No, mai ☐ In alcuni casi sì, in altri no.

Motivazione:

2	

(b) Se $\dim V = 3$, allora f è un isomorfismo?

☐ Sì, sempre ☐ No, mai ☐ In alcuni casi sì, in altri no.

Motivazione:

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

3. Si consideri, al variare del parametro reale k, l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$f(a,b,c,d) = (ka + 2kb - kc + d, a + 2b - c + 2d, 2a + 4b - 2c + 3d, 4d)$$

2	

(a) Determinare per ogni k, una base di $f(\mathbb{R}^4)$.

Motivazione:

2	

(b) Determinare, per ogni k, una base di $\ker f$.

Motivazione:

3	

(c) Determinare tutti i valori di k per i quali si ha $\ker f \oplus f(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^4$.

Motivazione:

4. Sia data, al variare del parametro reale k, la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

| 3 | |

(a) Per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile?

Motivazione:

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

| 4 | |

(b) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

Motivazione:

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il punto $A := (3, 2)$ e la retta r di equazione cartesiana $x + 2y - 12 = 0$.

2	

(a) Determinare il punto C simmetrico di A rispetto alla retta r.

Motivazione:

2	

(b) Determinare i punti B e D in modo tale che $ABCD$ sia un quadrato avente come diagonale il segmento AC.

Motivazione:

3	

(c) Determinare i punti E e F in modo tale che $AECF$ sia un rombo di area uguale a 20 e avente come diagonale il segmento AC.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati $A := (1, 2, 3)$ e $B := (3, 8, 5)$.

2 (a) Determinare l'equazione cartesiana della sfera S avente come diametro il segmento AB.

Motivazione:

2 (b) Determinare il piano π tangente alla sfera S in A.

Motivazione:

3 (c) Determinare la sfera S' tangente in A alla sfera S, avente volume uguale a $\frac{1}{8}$ del volume della sfera S e appartenente al semispazio Σ delimitato da π contenente il punto B.

Motivazione: