COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i punti $A := (1, 0, 1, 0)$, $B := (1, -1, 0, 0)$, $C := (2, 1, 1, 0)$ e $D := (2, 0, 0, k)$.

2 (a) Per quali valori di k esiste un piano che contiene i punti A, B, C e D?

Motivazione:

2 (b) Per quali valori di k esiste un iperpiano che contiene i punti A, B, C e D?

Motivazione:

2. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V e sia a un autovalore di f.

1	

(a) Dare la definizione di autospazio $E(a)$ di f relativo all'autovalore a.

1	

(b) Dimostrare che $E(a)$ è un sottospazio vettoriale di V.

1	

(c) Siano B e B' matrici associate a f relativamente a basi differenti di V. Dimostrare che B e B' hanno lo stesso rango.

1	

(d) Dimostrare che le matrici B e B' definite in (c) hanno lo stesso determinante.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i seguenti sottospazi vettoriali:

$$W := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$$

2	

(a) Determinare una base di W.

Motivazione:

3	

(b) Determinare la dimensione di $U \cap W$ e di $U + W$.

$\dim U \cap W =$	$\dim U + W =$

Motivazione:

2	

(c) Determinare una base ortonormale di W.

4. Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4[x]$ associato alla seguente matrice A relativamente alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4[x]$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2	

(a) Determinare una base del nucleo di f.

Motivazione:

3	

(b) Determinare la matrice rappresentativa dell'omomorfismo f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (2, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 := (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 := (1, 0, 0)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$.

Motivazione:

3	

(c) Determinare $f^{-1}\left(1 + 2x + 3x^2 + 2x^3\right)$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati i tre punti $P := (3, 4)$, $Q := (2, 1)$ e $R_k := (k, 0)$, con k parametro reale.

3	

(a) Determina tutti i valori di k per i quali esiste una circonferenza passante per P, Q e R_k.

Motivazione:

2	

(b) Determina il valore di k per cui il triangolo PQR_k è rettangolo in Q.

Motivazione:

Nel resto dell'esercizio utilizza il valore di k determinato al punto (b) (PQR_k rettangolo in Q).

2	

(c) Determina il centro C della circonferenza γ passante per i punti P, Q e R_k

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (1, 4, 2)$ e il piano $\pi : x - y + z - 5 = 0$.

2	

(a) La sfera S di centro P e tangente il piano π ha equazione:

Motivazione:

2	

(b) Sia σ il piano parallelo a π e passante per P. La sfera T che ha il centro su π e che è tangente in P a σ ha equazione:

Motivazione:

3	

(c) Determina il raggio della circonferenza γ intersezione di S e T:

Motivazione: