COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano A e B due matrici quadrate. Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo che è autovettore di A relativamente all'autovalore 2 ed è autovettore di B relativamente all'autovalore -5.

2 | (a) Si consideri la matrice $A + B$.

☐ il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di $A + B$ relativamente all'autovalore ☐
☐ il vettore $\mathbf{v}$ non è autovettore di $A + B$
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se $\mathbf{v}$ è autovettore di $A + B$ oppure no

Motivazione:

2 | (b) Si consideri la matrice $(A + B)^2$.

☐ il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di $(A + B)^2$ relativamente all'autovalore ☐
☐ il vettore $\mathbf{v}$ non è autovettore di $(A + B)^2$
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se $\mathbf{v}$ è autovettore di $(A + B)^2$ oppure no

Motivazione:

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento affine siano dati i punti $A := (2, 1, 1)$, $B := (3, 2, 4)$ e il piano $\pi : x + y + 2z + 19 = 0$.

2	

(a) Il segmento di estremi A e B interseca il piano π?

☐ Sì ☐ No

Motivazione:

2	

(b) La semiretta di origine A e contenente B interseca il piano π?

☐ Sì ☐ No

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da $f(x, y, z, w) := (x - y, y - z, z - w, w - x)$.

2	

(a) Determina una base del nucleo di f.

Motivazione:

2	

(b) Determina una base dell'immagine di f.

Motivazione:

3	

(c) Esistono tre vettori distinti **u**, **v** e **w** che hanno la stessa immagine non nulla tramite f? Se sì, scrivere dei vettori siffatti (non è necessaria la motivazione), se no, spiegare perché non esistono.

☐ Tre vettori siffatti sono, ad esempio:	☐ Non esistono vettori siffatti. Infatti:

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $\mathbf{u} := (0, 1, 1, -1)$ e $\mathbf{v} := (1, 0, 1, -1)$ e F il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $(2, 2, 3, 0)$ e $(0, 0, 1, -4)$.

2 (a) Determina una base per $E \cap F$.

Motivazione:

2 (b) Determina una base per $E + F$.

Motivazione:

3 (c) Determina tutti i vettori di F ortogonali sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento euclideo sia dato il triangolo di vertici $A := (4, 7)$, $B := (-6, 7)$ e $C := (6, 1)$.

2	

(a) Determina l'intersezione delle altezze del triangolo ABC:

Motivazione:

2	

(b) Determina l'intersezione degli assi dei lati del triangolo ABC:

Motivazione:

3	

(c) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza passante per i punti A, B e C:

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (3, 2, 1)$ e la retta
$$r : \begin{cases} x - 2y \qquad + 8 = 0 \\ \qquad y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

2	

(a) Il piano π contenente r e passante per il punto A ha equazione:

Motivazione:

2	

(b) Il piano σ ortogonale a r e passante per il punto A ha equazione:

Motivazione:

3	

(c) La distanza tra il punto A e la retta r è:

Motivazione: