COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia data la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2 (a) Determinare, se esiste, una matrice $M \in GL(2, \mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

Motivazione:

2 (b) Determinare, se esiste, una matrice $M \in GL(2, \mathbb{R})$ tale che $\det M = 5$ e $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale.

Motivazione:

2. Siano dati, al variare del parametro reale k, i punti $O := (0,0,0,0)$, $A := (1,1,1,k)$, $B := (1,1,1,0)$ e $C := (1,1,0,0)$ di $\mathbb{R}^4$.

2	

(a) Determinare, per ogni valore di k, la dimensione dell'inviluppo affine Π dei punti O, A, B e C.

Motivazione:

2	

(b) Posto $k = 1$, determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Π che passa per i punti O, A, B, C e specificare se Π è un sottospazio vettoriale.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Dato uno spazio vettoriale V avente come base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, sia $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^4[x]$ l'omomorfismo tale che $f(\mathbf{v}_1) = 2 - x - x^2$, $f(\mathbf{v}_2) = 1 + x + x^2 + 3x^3$, $f(\mathbf{v}_3) = 3 + 3x^3$.

2	

(a) Determinare una base di $f(V)$.

Motivazione:

2	

(b) Determinare una base di $\ker f$.

Motivazione:

2	

(c) Determinare una base di un sottospazio V' supplementare di $\ker f$ in V.

4

4. Sia $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_4$, $f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_4) = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_4$.

   (a) Determinare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

   Motivazione:

3

   (b) Determinare una base di R^4 formata da autovettori di f che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

   Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano date la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ e la retta r di equazione $x - 2y + 21 = 0$.

2	

(a) Verificare se l'origine O del sistema di riferimento è interno alla circonferenza $\mathcal{C}$.

Motivazione:

2	

(b) Determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette parallele alla retta r e tangenti alla circonferenza $\mathcal{C}$.

Motivazione:

3	

(c) Determinare le equazioni cartesiane di tutte le rette parallele alla retta r che intersecano la circonferenza $\mathcal{C}$ in due punti che sono vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza $\mathcal{C}$.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il piano $\pi : 2x - y + z - 2 = 0$, il punto $A := (2, 1, -1) \in \pi$ e il punto $B := (0, 1, -3) \notin \pi$.

3 (a) Determinare equazioni cartesiane della retta r proiezione ortogonale sul piano π della retta passante per A e B.

Motivazione:

2 (b) Calcolare la lunghezza del segmento proiezione ortogonale sul piano π del segmento di estremi A e B.

Motivazione:

2 (c) Calcolare l'area del triangolo ABC, dove C è la proiezione ortogonale su π di B.

Motivazione: