COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano date le matrici $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 (a) Determinare, se esiste, una matrice invertibile M, tale che $B = M^{-1}AM$.

Motivazione:

2 (b) Determinare, se esiste, una matrice invertibile N, tale che $C = N^{-1}AN$.

Motivazione:

2	

2. Siano dati $P_1 := (0,1,1,0)$, $P_2 := (1,0,1,0)$, $P_3 := (0,0,1,1)$ e $P_4 := (1,2,4,1)$.

   (a) Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da P_1, P_2, P_3. Determinare la dimensione di V e verificare se P_4 appartiene a V.

   Motivazione:

2	

   (b) Determinare la dimensione dell'inviluppo affine E di P_1, P_2, P_3 e verificare se P_4 appartiene a E.

   Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $f(a, b, c, d) := (2b + d, a + 2c, a - 2b + kc - d)$.

| 2 | |

(a) Determinare il valore di k per cui l'immagine di f ha dimensione uguale a 2 e determinare, in corrispondenza di tale valore, una base per l'immagine.

Motivazione:

| 2 | |

(b) Utilizzando il valore di k di cui al punto (a), determinare una base per il nucleo di f.

Motivazione:

| 3 | |

(c) Posto $k = 2$, determinare la matrice A' rappresentativa dell'omomorfismo f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e alla base $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 0, -1)$ di $\mathbb{R}^3$.

Motivazione:

4. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato, relativamente alla base canonica, alla matrice
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

3

(a) Determinare gli autovalori di f e una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori distinti effettivamente presenti).

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2

(b) Determinare una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

2

(c) Determinare, se esiste, un'altra matrice ortogonale N tali che $D = N^{-1}AN$ (con D stessa matrice diagonale determinata al punto precedente).

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (3,7)$, $B = (1,3)$, $C = (7,3)$, $D = (7,5)$.

2	

(a) Determinare l'equazione della circonferenza γ avente come diametro BD e stabilire se i punti A e C appartengono a γ.

Motivazione:

2	

(b) Calcolare l'area del quadrilatero $ABCD$ (che è non intrecciato).

Motivazione:

3	

(c) Determinare le equazioni cartesiane delle rette tangenti a γ e parallele alla retta r passante per A e C.

Motivazione:

6. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano. Sia dato il piano $\pi : x+y-2z+3=0$. Siano dati il punto $A := (-3,2,1)$ appartenente a π e il punto $B := (5,4,0)$.

2 (a) Determinare la proiezione ortogonale H del punto B sul piano π.

Motivazione:

2 (b) Determinare il raggio r e il centro C della circonferenza intersezione del piano π con la sfera di centro B passante per A.

Motivazione:

3 (c) Considerati i punti A' e B' simmetrici rispettivamente di A e B rispetto a H, determinare l'area del quadrilatero $ABA'B'$.

Motivazione: