5 FEBBRAIO 2015 - ESAME DI GEOMETRIA - 12 CREDITI
INGEGNERIA GESTIONALE - A.A. 2014-15

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $f : V \longrightarrow W$ un omomorfismo tra spazi vettoriali.

| 2 | |

(a) Se $\dim V = 4$ e $\dim W = 2$ allora:

☐ $\dim \ker f > 0$ per ogni omomorfismo f
☐ $\dim \ker f > 0$ per nessun omomorfismo f
☐ $\dim \ker f > 0$ per alcuni omomorfismi f, per altri omomorfismi f si ha $\dim \ker f = 0$

Motivazione:

| 2 | |

(b) Se $\dim V = 2$ e $\dim W = 4$ allora:

☐ $\dim \ker f > 0$ per ogni omomorfismo f
☐ $\dim \ker f > 0$ per nessun omomorfismo f
☐ $\dim \ker f > 0$ per alcuni omomorfismi f, per altri omomorfismi f si ha $\dim \ker f = 0$

Motivazione:

2. Siano dati $A := (1, 2, 3, 4)$, $B := (2, 1, 4, 3)$, $C := (4, 3, 2, 1)$, $D := (2, 3, 4, 1)$ e $P := (1, 1, 2, 0)$.

2	

(a) Indicato con Σ l'iperpiano contenente i punti A, B, C e D, determinare il semispazio delimitato da Σ e contenente il punto P.
Nel caso in cui il sottospazio affine contenente i punti A, B, C e D non sia un iperpiano, determinarne la dimensione e NON rispondere alla domanda successiva. In tal caso questa domanda vale 4 punti.

Motivazione:

2	

(b) Determinare la proiezione ortogonale H del punto P sull'iperpiano Σ.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia V uno spazio vettoriale avente come base i vettori $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \mathbf{v}_4$.
Sia E il sottospazio vettoriale di V generato dai vettori
$\mathbf{e}_1 := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3,\ \mathbf{e}_2 := \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4, \mathbf{e}_3 := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$.
Sia F il sottospazio vettoriale di V generato dai vettori
$\mathbf{f}_1 := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\ \mathbf{f}_2 := \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4,\ \mathbf{f}_3 :=\ \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$.

2	

(a) Determinare le dimensioni di E e di F.

Motivazione:

2	

(b) Determinare la dimensione di $E + F$ e una sua base.

Motivazione:

3	

(c) Determinare la dimensione di $E \cap F$ e una sua base.

Motivazione:

4. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da:
$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) := 3a_0 + 6a_2 + (a_0 + 2a_2)x + (a_0 + 2a_2)x^2$.

3 (a) Determinare gli autovalori di f e una base per ciascun autospazio di f.
Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori distinti effettivamente presenti).

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2 (b) Determinare , se esiste, una matrice diagonale D e una matrice M tali che $D = M^{-1}AM$.

2 (c) Determinare la dimensione del sottospazio affine $f^{-1}(3 + x + x^2)$ e determinarne tutti i suoi vettori.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia data la retta t di equazione $x-2y-2=0$.

2	

(a) Determinare l'equazione della circonferenza γ tangente alla retta t nel suo punto P di ascissa uguale a 4 ed avente il centro C sulla retta r di equazione $x+y-7=0$.

Motivazione:

2	

(b) Determinare le rette s_1, s_2 perpendicolari alla retta t, aventi distanza uguale a $\sqrt{5}$ dal centro C della circonferenza γ.

Motivazione:

3	

(c) Determinare l'area del rettangolo i cui vertici sono i punti di intersezione delle due rette s_1, s_2 con la circonferenza γ.

Motivazione:

6. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano. Sia dato il piano $\pi : 2x+2y+2z-7=0$.

| 2 | |

(a) Determinare l'equazione della sfera di centro $K := (1,1,0)$ tangente al piano π.

Motivazione:

| 2 | |

(b) Dati, al variare del parametro reale h, i punti $A := (1,1,h), B := (2,h,1), C := (h+1,h,0)$, determinare h in modo che il triangolo ABC sia rettangolo con ipotenusa AC.

Motivazione:

| 3 | |

(c) Posto h uguale al valore ottenuto in (b), stabilire se il piano π interseca il triangolo ABC.

Motivazione: