COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni:

2	

(a) Dati tre vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di uno spazio vettoriale V, allora, preso comunque un vettore $\mathbf{u} \in V$, si ha sempre che i vettori $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{u}$ sono linearmente indipendenti.

Motivazione:

2	

(b) Dati tre vettori linearmente indipendenti $\mathbf{v} := (a, b, c), \mathbf{v}' := (a', b', c'), \mathbf{v}'' := (a'', b'', c'')$ di $\mathbb{R}^3$, allora, presi comunque $h \neq 0, h' \neq 0, h'' \neq 0$, anche i vettori $h\mathbf{v}, h'\mathbf{v}', h''\mathbf{v}''$ sono linearmente indipendenti.

Motivazione:

2. In $\mathbb{R}^4$ siano dati $A := (1, 1, -1, -1), B := (2, 1, -3, -3), C := (1, 2, 1, 1), D := (2, 3, 1, 1)$.

2	

(a) Determinare la dimensione dell'inviluppo affine Σ generato da A, B, C, D.

Motivazione:

2	

(b) Determinare equazioni parametriche del sottospazio affine Σ' parallelo a Σ, della stessa dimensione di Σ e passante per $E := (1, 2, 1, 3)$.

Motivazione:

COGNOME......................NOME......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sistema Σ:

$$\Sigma : \begin{cases} x + (k+1)y + z = 3 \\ kx - y + 2z \quad = 5 \\ 2x + ky + 3z \quad = 8 \end{cases}$$

2	

(a) Determinare per quali valori di k il sistema Σ ammette la soluzione $(1, 0, 2)$.

Motivazione:

2	

(b) Considerato il sistema omogeneo Σ' associato a Σ, determinare per quali valori di k lo spazio vettoriale delle soluzioni di Σ' ha dimensione uguale a 1.

Motivazione:

3	

(c) Determinare per quali valori di k il sistema Σ ha soluzioni.

Motivazione:

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + (2a_0 + a_1 + 2a_2)x$.

2	

(a) Determinare un base per l'immagine di f.

Motivazione:

2	

(b) Determinare una base del nucleo di f.

Motivazione:

3	

(c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$. Nel caso in cui tali matrici non esistano, spiegare perché ciò avviene.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (11, 13), B := (14, 17)$.

| 3 | |

(a) Determinare almeno una coppia di punti C e D in modo tale $ABCD$ sia un quadrato.

Motivazione:

| 2 | |

(b) Determinare l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ circoscritta al quadrato $ABCD$.

Motivazione:

| 2 | |

(c) Determinare l'area della porzione di piano data dai punti che sono interni alla circonferenza $\mathcal{C}$ e esterni al quadrato $ABCD$.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $C := (1, 2, -1)$ e il piano α di equazione $x + 2y - z - 9 = 0$.

2	

(a) Determinare un'equazione della sfera Σ di centro C, passante per l'origine O del sistema di riferimento.

Motivazione:

2	

(b) Determinare un'equazione del piano π tangente alla sfera Σ nel punto P, simmetrico di O rispetto al centro di Σ.

Motivazione:

2	

(c) Determinare il raggio della circonferenza γ intersezione della sfera Σ con il piano α.

Motivazione: