

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V .
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni:

2

(a) Se \mathbf{v} è autovettore con autovalore uguale a 5, allora $\mathbf{w} := 4\mathbf{v}$ è un autovettore con autovalore uguale a 20.

Motivazione:

2

(b) Se \mathbf{v} e \mathbf{w} sono autovettori con autovalore uguale a 5, allora il vettore $\mathbf{v} + a\mathbf{w}$ è un autovettore se e solo se $a = 0$.

Motivazione:

2. In \mathbb{R}^4 siano dati $A := (-1, -2, 2, 1)$, $B := (0, 1, -2, 1)$, $C := (0, 0, 1, -1)$, $D := (0, 0, 0, 1)$.

2

(a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ passante per A , B , C e D .

Motivazione:

2

(b) Determinare equazioni parametriche di una retta passante per $F := (1, 2, 3, 4)$ e parallela a Σ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Si consideri l'omomorfismo da \mathbb{R}^3 a $M(2, 2, \mathbb{R})$ definito da $f(a, b, c) = \begin{pmatrix} a + 4b + 5c & 2a + 3b + 5c \\ 3a + 2b + 5c & 4a + b + 5c \end{pmatrix}$.

2

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e $M(2, 2, \mathbb{R})$.

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di $\ker f$.

Motivazione:

3

(c) Determinare tutti i vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Motivazione:

4. Sia f l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 associato alla matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, relativamente alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

3 (a) Determinare, se esiste, una base di autovettori di f che non sia ortogonale.

Motivazione:

2 (b) Determinare, se esiste, una base di autovettori di f che sia ortogonale, ma non ortonormale.

Motivazione:

2 (c) Determinare, se esiste, una base di autovettori di f che sia ortonormale.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (-2, \frac{2}{3})$ e il vettore $\mathbf{v} := (3, 4)$

2

(a) Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A e parallela al vettore \mathbf{v} e della retta s simmetrica di r rispetto all'origine del sistema di riferimento.

Motivazione:

2

(b) Determinare un'equazione della circonferenza γ di centro O e tangente alle rette r e s .

Motivazione:

3

(c) Determinare l'area del parallelogramma individuato dalle rette r e s e dalle rette r' e s' tangenti alla circonferenza γ e parallele all'asse delle y .

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta $r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 2t \end{cases}$
e i punti $A := (1, 2, 3)$ e $P := (-1, 0, 1)$.

2

- (a) Determinare un'equazione cartesiana del piano α contenente la retta r e passante per A .

Motivazione:

2

- (b) Determinare le coordinate del punto P' simmetrico del punto P rispetto al piano α .

Motivazione:

3

- (c) Determinare l'area del triangolo $PP'A$.

Motivazione: