COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni.

2 (a) *Date comunque due matrici A e B di ordine n si ha* $\operatorname{rk}(A+B) \geq \operatorname{rk} A$, $\operatorname{rk}(A+B) \geq \operatorname{rk} B$.

Motivazione:

2 (b) *Date comunque due matrici A e B di ordine n si ha* $\operatorname{rk}(A \cdot B) \geq \operatorname{rk} A$, $\operatorname{rk}(A \cdot B) \geq \operatorname{rk} B$.

Motivazione:

2. Siano dati $A := (1, 2, 5, 4)$, $B := (3, 5, 7, 9)$, $C := (7, 11, 11, 19)$ di $\mathbb{R}^4$.

2	

(a) Determinare la dimensione dell'inviluppo affine π di A, B, C e scrivere tutti i punti di π usando il minimo di parametri possibile.

Motivazione:

2	

(b) Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale V generato da A, B, C e scrivere tutti i punti di V usando il minimo di parametri possibile.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $S(2;\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 e sia $\mathbf{w}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ una sua base. Data, al variare del parametro k, la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 1 & -2 & k-2 \end{pmatrix}$, sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow S(2,\mathbb{R})$ l'omomorfismo associato alla matrice A relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ di $S(2,\mathbb{R})$.

2

(a) Determinare tutti valori del parametro k per i quali l'omomorfismo f NON è un isomorfismo.

Motivazione:

2

(b) Posto $k = 2$, determinare una base del nucleo di f.

Motivazione:

3

(c) Posto $k = 2$ e data la matrice $B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinare $f^{-1}(B)$.

Motivazione:

4. Al variare del parametro reale k, si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato, relativamente alla base canonica, alla matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix}$.

3	

(a) Determinare, per ogni valore di k , gli autovalori di f e una base per ciascun autospazio di f.

Motivazione:

2	

(b) Determinare tutti i valori di k per i quali esiste una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$ e, per ognuno di essi, determinare sia D che M.

2	

(c) Determinare tutti i valori di k per i quali esiste una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$ e, per ognuno di essi, determinare sia D che M.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine, siano dati i punti $A := (3,4)$, $B = (7,10)$, $C = (1,2)$. Sia r la retta passante per A e B.

2 (a) Determinare la retta r' simmetrica della retta r rispetto a C.

Motivazione:

2 (b) Dati i punti A' e B' simmetrici dei punti A e B rispetto a C, dimostrare la verità o falsità della seguente affermazione: *il quadrilatero $ABA'B'$ è un parallelogramma.*

Motivazione:

3 (c) Dato il punto $P := (-3,-3)$, determinare i punti Q e Q' tali che i quadrilateri $ABPQ$ e $ABQ'P$ siano parallelogrammi. Verificare se i punti P, Q e Q' sono allineati.

Motivazione:

6. Sia fissato nello spazio tridimensionale un sistema di riferimento cartesiano. Siano date le rette

$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+2t \\ z = 4-t \end{cases}.$$

2 (a) Determinare due piani π e π' che siano paralleli e tali che $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.

Motivazione:

3 (b) Determinare la retta s perpendicolare e incidente le rette r e r'.

Motivazione:

2 (c) Calcolare la distanza tra le rette r e r'.

Motivazione: