

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano date $A \in M(\mathbb{R}, 2, 2)$ e $B \in M(\mathbb{R}, 2, 2)$. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti due affermazioni.

2

(a) *Se B è simile a A allora $\det B = \det A$.*

Motivazione:

2

(b) *Se $\det B = \det A$ allora B è simile a A .*

Motivazione:

2. Dati in \mathbb{R}^5 i punti $A := (1, 2, 3, 4, 5)$, $B := (3, 5, 7, 2, 1)$, $C := (4, \frac{13}{2}, 9, 1, -1)$ e $D := (2, 3, 4, 5, 6)$, sia r la retta passante A e B .

2

- (a) Il punto C appartiene alla retta r ?

Motivazione:

2

- (b) Esiste un sottospazio affine di \mathbb{R}^5 di dimensione 2 contenente i punti A, B, C e D ?
Se non esiste, spiegare perché. Se esiste, determinarne equazioni parametriche.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$.
Sia E il sottospazio di V avente come base $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$
Sia F il sottospazio di V avente come base $\mathbf{f}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5$.

2

- (a) Determinare una base di $E + F$.

Motivazione:

3

- (b) Determinare una base di $E \cap F$.

Motivazione:

2

- (c) Determinare una base di un sottospazio vettoriale G di $E + F$ tale che si abbia $E + F = E \oplus G$.

4. Sia f l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 definito da: $f((a, b, c)) = (-a + 2b, 2a - c, 2b - c)$.

2

(a) Verificare se l'endomorfismo f è un isomorfismo.

Motivazione:

NOTA. D'ora in poi indichiamo con A la matrice associata a f relativamente alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

4

(b) Determinare se, esistono, una matrice $M \in GL(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale D tali che $D = M^{-1}AM$.

Motivazione:

1

(c) Determinare se, esistono, una matrice $N \in O(3)$ e una matrice diagonale D' tali che $D' = N^{-1}AN$.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano date le rette $t_1 : x - y + 5 = 0$,
 $t_2 : x - y - 3 = 0$ e $s : \begin{cases} x = 8 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$.

2

- (a) Determinare un'equazione della circonferenza γ avente il centro sulla retta s e tangente alle rette t_1 e t_2 .

Motivazione:

3

- (b) Detti T_1 e T_2 i punti di tangenza di γ con le rette t_1 e t_2 , determinare i punti A e B di γ tali che il quadrilatero AT_1BT_2 sia un quadrato.

Motivazione:

2

- (c) Determinare il perimetro del quadrato AT_1BT_2 .

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati, al variare del parametro h , i punti $A := (1, 2, -1)$, $B := (0, 1, 1)$ e $C := (1, 2, h)$.

- 2 (a) Determinare il valore di h per cui il triangolo ABC è rettangolo in B .

Motivazione:

NOTA: D'ora in poi si consideri il caso in cui il triangolo ABC è rettangolo in B .

- 3 (b) Determinare la lunghezza dell'altezza del triangolo ABC relativa all'ipotenusa.

Motivazione:

- 2 (c) Calcolare l'area del triangolo ABC .

Motivazione: