COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo i punti $A := (1,2,3,4)$, $B := (1,3,3,4)$, $C := (1,3,3,5)$, $D := (1,2,3,5)$ e $E := (k,3,3,5)$ con $k$ parametro reale.

2 (a) Determinare tutti i valori di $k$ per i quali i punti $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$ sono allineati.

Motivazione:

2 (b) Determinare tutti i valori di $k$ per i quali i punti $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$ sono complanari.

Motivazione:

2. Sia $f : V \to W$ un omomorfismo da uno spazio vettoriale $V$ avente come base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a uno spazio vettoriale $W$ avente come base $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$.

| 2 | |
|---|---|

(a) L'omomorfismo $f$ è suriettivo?

☐ Sì, l'omomorfismo $f$ è sempre suriettivo.
☐ No, l'omomorfismo $f$ non è mai suriettivo.
☐ I dati assegnati non sono sufficienti per stabilirlo.

Motivazione:

| 2 | |
|---|---|

(b) L'omomorfismo $f$ è iniettivo?

☐ Sì, l'omomorfismo $f$ è sempre iniettivo.
☐ No, l'omomorfismo $f$ non è mai iniettivo.
☐ I dati assegnati non sono sufficienti per stabilirlo.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $E$ uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{e}_1$ , $\mathbf{e}_2$ , $\mathbf{e}_3$.
Sia $V$ il sottospazio vettoriale di $E$ avente come base $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
Sia $W$ il sottospazio vettoriale di $E$ avente come base $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$

| 2 | |
|---|---|

(a) Determinare una base di $V + W$.

Motivazione:

| 2 | |
|---|---|

(b) Determinare una base di $V \cap W$.

Motivazione:

| 3 | |
|---|---|

(c) Determinare un sottospazio vettoriale $F$ di $E$ tale che $\dim F = 2$ e $\dim(V \cap F) = 1$.

Motivazione:

4. Sia $f$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & k \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $k$ parametro reale, relativamente alla base canonica.

2

(a) Determinare tutti i valori di $k$ per i quali il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ appartiene a $f(\mathbb{R}^3)$.

Motivazione:

2

(b) Determinare tutti i valori di $k$ per i quali il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$ è autovettore di $f$.

Motivazione:

3

(c) Determinare tutti i valori di $k$ per i quali l'endomorfismo $f$ è diagonalizzabile.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, consideriamo il punto $A := (3, 4)$ e la retta $r : 3x - y + 1 = 0$.

| 2 | |
|---|---|

(a) Determinare un'equazione cartesiana della retta $s$ simmetrica della retta $r$ relativamente al punto $A$.

Motivazione:

| 2 | |
|---|---|

(b) Determinare la distanza tra le rette $r$ e $s$.

Motivazione:

| 3 | |
|---|---|

(c) Esistono circonferenze che siano tangenti sia alla retta $r$ che alla retta $s$?
Nel caso in cui esistano, determinare un'equazione di una tale circonferenza. Nel caso in cui non esistano spiegare perché non esistono.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesino, consideriamo il piano $\pi : x+y+3z-8=0$ e il punto $A := (3,2,1)$ appartente ad esso.

2

(a) Verificare se la retta $r$ passante per $A$ e per il punto $B = (6,2,0)$ interseca o è contenuta nel piano $\pi$.

Motivazione:

3

(b) Determinare la retta $s$ passante per il punto $A$, contenuta nel piano $\pi$ e perpendicolare alla retta $r$.

Motivazione:

2

(c) Calcolare la distanza del punto $B$ dalla retta $s$ determinata nel punto precedente.

Motivazione: