COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 := (1,2), \mathbf{v}_2 := (1,1), \mathbf{v}_3 := (3,5)$.
   Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{w}_1 := (1,2,1), \mathbf{w}_2 := (2,4,k), \mathbf{w}_3 := (4,8,h)$, dove h e k sono numeri reali.

2

(a) Determinare tutti i valori di k per i quali esiste un omomorfismo iniettivo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$.

Motivazione:

2

(b) Posto $k = 5$, determinare tutti i valori h per i quali esiste un omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$.

Motivazione:

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i punti $A := (1, 2, 3, 4), B := (1, 1, 1, 1)$ e $C := (0, 1, 2, 3)$.

| 2 | |

(a) Esiste un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$, tale che $\dim V = 2$ contenente i punti A, B e C? Se esiste, determinarne una base. Se non esiste, spiegare perché non esiste.

Motivazione:

| 2 | |

(b) Esiste una retta di $\mathbb{R}^4$ contenente i punti A, B e C? Se esiste, determinarne le equazioni parametriche. Se non esiste, spiegare perché non esiste.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato il sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_2 = 0\}$$

Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ avente come base $\mathbf{w}_1 := (1, 1, 4, 0), \mathbf{w}_2 := (4, 5, 3, 4)$.

2	

(a) Determinare una base di V.

Motivazione:

3	

(b) Determinare una base di $V \cap W$.

Motivazione:

2	

(c) Determinare una base per un sottospazio U supplementare di W in $\mathbb{R}^4$.

Motivazione:

4. Al variare del numero reale k, sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

2	

(a) Determinare, al variare di k, una base dell'immagine di f.

Motivazione:

3	

(b) Determinare tutti i valori di k per i quali esistono una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$. Per ognuno di tali valori di k, determinare le matrici D e M.

Motivazione:

2	

(c) Scelto uno dei valori di k ottenuti in (b), determinare, se esiste, una matrice ortogonale N tale che $D = N^{-1}AN$, dove D è la matrice ottenuta in (b).

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, 2)$ e $B := (4, 6)$.

3	

(a) Determinare i punti C e C' tali che i triangoli ABC e ABC' siano rettangoli in A e abbiano area uguale a 25.

Motivazione:

2	

(b) Determinare le circonferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ circoscritte rispettivamente ai triangoli ABC e ABC'.

Motivazione:

2	

(c) Determinare equazioni parametriche dell'asse del segmento avente come estremi i centri delle circonferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia r la retta passante per i punti $A := (1, 2, 1)$ e $B := (3, 1, 1)$ e sia r' la retta passante per i punti $C := (-1, 4, 2)$ e $D := (2, 4, 1)$.

2 (a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per $P_0 := (-2, -2, 0)$ e parallelo alle rette r e r'.

Motivazione:

2 (b) Determinare la sfera $\mathcal{S}$ di centro A e tangente al piano π.

Motivazione:

3 (c) Determinare il punto T di tangenza della sfera $\mathcal{S}$ con il piano π.

Motivazione:

COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{v}_1 := (2,1), \mathbf{v}_2 := (1,1), \mathbf{v}_3 := (7,4)$.
Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{w}_1 := (1,2,1), \mathbf{w}_2 := (2,4,k), \mathbf{w}_3 := (5,10,h)$, dove h e k sono numeri reali.

2 (a) Determinare tutti i valori di k per i quali esiste un omomorfismo iniettivo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$.

Motivazione:

2 (b) Posto $k = 6$, determinare tutti i valori h per i quali esiste un omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$.

Motivazione:

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i punti $A := (4, 2, 3, 1), B := (1, 1, 1, 1)$ e $C := (3, 1, 2, 0)$.

2	

(a) Esiste un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$, tale che $\dim V = 2$ contenente i punti A, B e C? Se esiste, determinarne una base. Se non esiste, spiegare perché non esiste.

Motivazione:

2	

(b) Esiste una retta di $\mathbb{R}^4$ contenente i punti A, B e C? Se esiste, determinarne le equazioni parametriche. Se non esiste, spiegare perché non esiste.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato il sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_2 = 0\}$$

Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ avente come base $\mathbf{w}_1 := (1, 1, 6, 0), \mathbf{w}_2 := (4, 5, 3, 4)$.

2	

(a) Determinare una base di V.

Motivazione:

3	

(b) Determinare una base di $V \cap W$.

Motivazione:

2	

(c) Determinare una base per un sottospazio U supplementare di W in $\mathbb{R}^4$.

Motivazione:

4. Al variare del numero reale k, sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

2

(a) Determinare, al variare di k, una base dell'immagine di f.

Motivazione:

3

(b) Determinare tutti i valori di k per i quali esistono una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$. Per ognuno di tali valori di k, determinare le matrici D e M.

Motivazione:

2

(c) Scelto uno dei valori di k ottenuti in (b), determinare, se esiste, una matrice ortogonale N tale che $D = N^{-1}AN$, dove D è la matrice ottenuta in (b).

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (2, 1)$ e $B := (6, 4)$.

| 3 | |

(a) Determinare i punti C e C' tali che i triangoli ABC e ABC' siano rettangoli in A e abbiano area uguale a 25.

Motivazione:

| 2 | |

(b) Determinare le circonferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ circoscritte rispettivamente ai triangoli ABC e ABC'.

Motivazione:

| 2 | |

(c) Determinare equazioni parametriche dell'asse del segmento avente come estremi i centri delle circonferenze $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia r la retta passante per i punti $A := (1, 2, 1)$ e $B := (1, 1, 3)$ e sia r' la retta passante per i punti $C := (2, 4, -1)$ e $D := (1, 4, 2)$.

2

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per $P_0 := (0, -2, -2)$ e parallelo alle rette r e r'.

Motivazione:

2

(b) Determinare la sfera $\mathcal{S}$ di centro A e tangente al piano π.

Motivazione:

3

(c) Determinare il punto T di tangenza della sfera $\mathcal{S}$ con il piano π.

Motivazione: