COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale:
$V := \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$

2 (a) Determinare una base di V.

Motivazione:

2 (b) Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard. Dimostrare la verità o falsità della seguente affermazione:
Se $\mathbf{w}$ è un vettore perpendicolare a tutti i vettori della base di V scelta in (a), allora $\mathbf{w}$ è perpendicolare a tutti i vettori di V.

Motivazione:

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il piano $\pi : x - 2y + z = 0$. Sia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ una base ortonormale dello spazio tale che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sia una base di π.

2 (a) Si consideri l'endomorfismo f dello spazio che associa ad ogni punto dello spazio la sua proiezione ortogonale sul piano π. Determinare la matrice F associata a f relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Motivazione:

2 (b) Si consideri l'endomorfismo g dello spazio che associa ad ogni punto dello spazio il suo simmetrico rispetto al piano π. Determinare la matrice G associata a g relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Si consideri il sottospazio vettoriale V dello spazio vettoriale $M(2,2,\mathbb{R})$ definito da:

$$V := \{A \in M(2,2,\mathbb{R}) \mid A = -{}^tA\}$$

2	

(a) Determinare una base di V.

Motivazione:

3	

(b) Determinare $V \cap S(2,\mathbb{R})$ (ricordiamo che $S(2,\mathbb{R})$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche).

Motivazione:

2	

(c) Determinare tutte le matrici appartenenti al sottospazio affine di dimensione 2 parallelo a V e passante per $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Motivazione:

4. Sia $\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la base canonica dello spazio vettoriale $M(2, 2, \mathbb{R})$. Sia f l'endomorfismo di $M(2, 2, \mathbb{R})$ definito da $f(B) = 2\ {}^tB$.

2	

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base canonica.

Motivazione:

3	

(b) Determinare, se esistono, una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

Motivazione:

3	

(c) Determinare, se esistono, una matrice diagonale $D' \neq D$ e una matrice invertibile N tali che $D' = N^{-1}AN$

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1,5)$, $C := (-1,2)$ e $C' = (5,2)$. Siano poi date la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e passante per A e la circonferenza $\mathcal{C}'$ di centro C' e passante per A.

3 (a) Determinare l'area del quadrilatero $ACA'C'$, dove A' è il punto distinto da A di intersezione della circonferenza $\mathcal{C}$ e della circonferenza $\mathcal{C}'$.

Motivazione:

2 (b) Determinare un' equazione cartesiana della retta s passante per A e tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ e un' equazione cartesiana della retta s' passante per A e tangente alla circonferenza $\mathcal{C}'$.

Motivazione:

2 (c) Determinare i coseni degli angoli formati dalle rette s e s'.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$ e i punti $A := (1, -1, 1)$ e $B := (2, 3, -4)$, entrambi appartenenti al piano π. Sia r_1 la retta passante per A e B.

3

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r_2 passante per A, perpendicolare alla retta r_1 e contenuta nel piano π.

Motivazione:

2

(b) Determinare delle equazioni parametriche della retta r_3 passante per A e perpendicolare sia alla retta r_1 che alla retta r_2.

Motivazione:

3

(c) Determinare il volume della piramide di vertice D e base ABC, dove C è un punto della retta r_2 avente distanza da A uguale a 5 e D è un punto della retta r_3 avente distanza da A uguale a 2.
(Ricordiamo che il volume di una piramide è uguale all'area della base per l'altezza diviso 3.)

Motivazione:

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale:
$W := \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\right\}$

2 (a) Determinare una base di W.

Motivazione:

2 (b) Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard. Dimostrare la verità o falsità della seguente affermazione:
Se $\mathbf{v}$ *è un vettore perpendicolare a tutti i vettori della base di* W *scelta in (a), allora* $\mathbf{v}$ *è perpendicolare a tutti i vettori di* W.

Motivazione:

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il piano $\alpha : -2x + y + z = 0$. Sia $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ una base ortonormale dello spazio tale che $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sia una base di α.

2	

(a) Si consideri l'endomorfismo g dello spazio che associa ad ogni punto dello spazio la sua proiezione ortogonale sul piano α. Determinare la matrice G associata a g relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Motivazione:

2	

(b) Si consideri l'endomorfismo f dello spazio che associa ad ogni punto dello spazio il suo simmetrico rispetto al piano α. Determinare la matrice F associata a f relativamente alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Motivazione:

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Si consideri il sottospazio vettoriale W dello spazio vettoriale $M(2,2,\mathbb{R})$ definito da:

$$W := \{B \in M(2,2,\mathbb{R}) \mid B = -{}^tB\}$$

| 2 | |

(a) Determinare una base di W.

Motivazione:

| 3 | |

(b) Determinare $W \cap S(2,\mathbb{R})$ (ricordiamo che $S(2,\mathbb{R})$ è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche).

Motivazione:

| 2 | |

(c) Determinare tutte le matrici appartenenti al sottospazio affine di dimensione 2 parallelo a W e passante per $D := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Motivazione:

4. Sia f l'endomorfismo di $M(2,2,\mathbb{R})$ definito da $f(A) = 3\ {}^tA$.

2	

(a) Determinare la matrice B associata a f relativamente alla base canonica $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ di $M(2,2,\mathbb{R})$.

Motivazione:

3	

(b) Determinare, se esistono, una matrice diagonale B' e una matrice invertibile M tali che $B' = M^{-1}BM$.

Motivazione:

3	

(c) Determinare, se esistono, una matrice diagonale $B'' \neq B'$ e una matrice invertibile N tali che $B'' = N^{-1}BN$

Motivazione:

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (10, 2)$, $C := (4, -2)$ e $C' = (4, 10)$. Siano poi date la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e passante per A e la circonferenza $\mathcal{C}'$ di centro C' e passante per A.

3	

(a) Determinare l'area del quadrilatero $ACA'C'$, dove A' è il punto distinto da A di intersezione della circonferenza $\mathcal{C}$ e della circonferenza $\mathcal{C}'$.

Motivazione:

2	

(b) Determinare un' equazione cartesiana della retta s passante per A e tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ e un'equazione cartesiana della retta s' passante per A e tangente alla circonferenza $\mathcal{C}'$.

Motivazione:

2	

(c) Determinare i coseni degli angoli formati dalle rette s e s'.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia dato il piano $\pi : 2x + y + z = 0$ e i punti $A := (1, -1, -1)$ e $B := (2, 1, -5)$, entrambi appartenenti al piano π. Sia r_1 la retta passante per A e B.

3	

(a) Determinare delle equazioni cartesiane della retta r_2 passante per A, perpendicolare alla retta r_1 e contenuta nel piano π.

Motivazione:

2	

(b) Determinare delle equazioni parametriche della retta r_3 passante per A e perpendicolare sia alla retta r_1 che alla retta r_2.

Motivazione:

3	

(c) Determinare il volume della piramide di vertice D e base ABC, dove C è un punto della retta r_2 avente distanza da A uguale a 5 e D è un punto della retta r_3 avente distanza da A uguale a 2.
(Ricordiamo che il volume di una piramide è uguale all'area della base per l'altezza diviso 3.)

Motivazione: