14 giugno 2017 - Esame di geometria - 12 crediti
Ingegneria gestionale - a.a. 2016-2017

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati in $\mathbb{R}^6$ i punti $P_1 := (1, 0, 1, 1, 0, -2), P_2 := (-1, 2, 1, -9, 0, 2)$, e l'iperpiano di equazione cartesiana $\pi : x_1 - x_2 + 5x_4 - 2x_6 = 1$.

2 (a) Determinare se il segmento P_1P_2 interseca o meno l'iperpiano π.

Motivazione:

2 (b) La retta passante per P_1 e P_2 è ortogonale a π?

Motivazione:

2. Verificare se ognuna delle seguenti affermazioni è vera. Se è vera darne una dimostrazione altrimenti fornire un controesempio.

2

(a) Se A, B, M sono matrici quadrate di ordine n con elementi reali tali che M è invertibile e $B = M^{-1}AM$, allora $\det(B) = \det(A)$.

Motivazione:

2

(b) Se A, B sono matrici quadrate di ordine $n > 1$ a elementi reali tali che $\det(A) = \det(B)$, allora esiste una matrice invertibile M di ordine n a elementi reali tale che $B = M^{-1}AM$.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f la funzione dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$ dei polinomi di grado minore di 3 a coefficienti reali allo spazio delle matrici $M(2,2,\mathbb{R})$ definito nel seguente modo: dato $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}^3[x]$, allora $f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{pmatrix}$, dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$.

2

(a) Dimostrare che f è un omomorfismo tra spazi vettoriali.
Motivazione:

2

(b) Determinare la dimensione e una base dell'immagine di f.

Motivazione:

3

(c) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathrm{Im}(f) \cap S_2(\mathbb{R})$, dove $S_2(\mathbb{R})$ è il sottospazio delle matrici simmetriche una cui base è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Motivazione:

4. Al variare dei parametri reali a e b, sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

2	

(a) Determinare, al variare di a e b, il rango della matrice A.

Motivazione:

4	

(b) Determinare tutti i valori di a e b per i quali la matrice A è simile ad una matrice diagonale.

Motivazione:

1	

(c) Determinare tutti i valori di a e b per i quali esiste una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $D = M^{-1}AM$.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, 2)$ e $B := (3, 6)$.

2 (a) Determinare le coordinate di tutti i punti C tali che i triangoli di vertici A, B e C siano isosceli con base AB.

Motivazione:

2 (b) Determinare le coordinate di tutti i punti D tali che i triangoli di vertici A, B e D siano equilateri.

Motivazione:

3 (c) Determinare i punti E e F tali che il quadrilatero $AEBF$ sia un quadrato avente come diagonale AB.

Motivazione:

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, sia r la retta passante per i punti $A := (1, 2, 3)$ e $B := (3, 3, 6)$.

2	

(a) Determinare la retta r sia in equazioni parametriche sia in equazioni cartesiane.

Motivazione:

2	

(b) Quanti sono i piani contenenti la retta r e perpendicolari al piano $\alpha := x + y - z + 3 = 0$. Per ognuno di essi determinare un'equazione cartesiana.

Motivazione:

3	

(c) Quanti sono i piani contenenti la retta r e perpendicolari al piano $\beta := -2x - y - 3z - 7 = 0$. Per ognuno di essi determinare un'equazione cartesiana.

Motivazione: