COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia A una matrice quadrata di ordine n con elementi reali, con n intero positivo maggiore di 1. Per ognuna delle seguenti affermazioni dimostrarne la verità oppure trovarne un controesempio.

2 (a) Se $A^2 = 0_n$, allora $A = 0_n$ (dove 0_n indica la matrice quadrata di ordine n con elementi tutti uguali a zero).

Motivazione:

2 (b) Se $A^2 = I_n$, allora $A = I_n$ (dove I_n indica la matrice identità di ordine n).

Motivazione:

2. Si considerino i seguenti elementi di $\mathbb{R}^4$: $A := (1, 2, 3, 4), B := (5, 6, 7, 8), C := (9, 10, 11, 12)$.

2	

(a) Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da A, B e C. Determinare la dimensione di V e una base di V.

Motivazione:

2	

(b) Sia W l'inviluppo affine di $\mathbb{R}^4$ contenente A, B e C (in altre parole W è il sottospazio affine di dimensione minima contenente A, B e C). Determinare la dimensione di W ed equazioni parametriche di W.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $\mathbb{R}^3[x]$ lo spazio dei polinomi $p(x) = ax^2 + bx + c$ di grado minore di 3 a coefficienti reali. Siano dati i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3[x]$

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}^3[x], p(2) = 0\}, \quad W = \{p(x) \in \mathbb{R}^3[x], p'(2) = 0\},$$

dove $p'(x)$ è la derivata di $p(x)$.

2	

(a) Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3[x]$ e determinarne una base.
Motivazione:

2	

(b) Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3[x]$ e determinarne una base.
Motivazione:

3	

(c) Calcolare la dimensione di $V \cap W$ e, se esiste, determinare una base di $V \cap W$.

Motivazione:

4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k+1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & k^2-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3	

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esistono una matrice invertibile M e una matrice diagonale D, entrambi quadrate di ordine 3, tali che $D = M^{-1}AM$.

Motivazione:

2	

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esistono una matrice invertibile *ortogonale* M e una matrice diagonale D, entrambi quadrate di ordine 3, tali che $D = M^{-1}AM$.

Motivazione:

2	

(c) Per ogni valore di k trovato nel punto (a) calcolare M e D.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia r la retta passante per i punti $A := (1, 2)$ e $H := (4, 6)$.

2	

(a) Determinare delle equazioni parametriche della retta s passante per H e perpendicolare a r.

Motivazione:

2	

(b) Determinare il punto B simmetrico del punto A rispetto alla retta s.

Motivazione:

3	

(c) Determinare un punto C appartenente alla retta s tale che il triangolo ABC abbia area uguale a 5.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (1, 2, 3)$ e il piano $\pi : x - 2y + z = 0$ passante per A.
Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro A, raggio uguale a 4 e contenuta nel piano π. Siano infine $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ le sfere di raggio uguale a 5 intersecanti il piano π nella circonferenza $\mathcal{C}$.

2 (a) Determinare delle equazioni parametriche della retta r passante per A e perpendicolare al piano π.

Motivazione:

2 (b) Determinare la distanza tra i centri C_1 e C_2 delle sfere $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

Motivazione:

3 (c) Determinare le coordinate dei centri C_1 e C_2 delle sfere $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$.

Motivazione: