COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V uno spazio vettoriale reale e siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori di V. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono vere o mostrare che sono false fornendo un controesempio.

2 (a) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti, allora esistono $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{v}_1 = \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$.

Motivazione:

2 (b) Se esistono $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{v}_1 = \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti.

Motivazione:

2. Siano dati i punti $A := (1, 1, 1, 1, 1)$, $B := (1, 2, 3, 4, 5)$ e $C := (5, 4, 3, 2, 1)$ di $\mathbb{R}^5$ e sia r la retta passante per A e B.

2	

(a) Determinare la retta r' passante per C e parallela alla retta r.

Motivazione:

2	

(b) Determinare un' equazione cartesiana dell'iperpiano π passante per C e perpendicolare alla retta r.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, sia V il suo sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

e sia W il suo sottospazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{w}_1 := (1, 0, 1, 0), \mathbf{w}_2 := (1, 1, 0, 2)$ e $\mathbf{w}_3 := (2, 1, 1, 2)$.

2	

(a) Determinare, se esistono, una base di V e una base di W.

Motivazione:

3	

(b) Determinare, se esistono, una base ortonormale di V e una base ortonormale di W.

Motivazione:

2	

(c) Verificare se si ha $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

Motivazione:

4. Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e sia W uno spazio vettoriale avente come base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$.
Sia $f\colon V \to W$ la funzione definita da $f(x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3) = (x+y+k^2-4)\mathbf{w}_1+(2x+ky+z)\mathbf{w}_2-2z\mathbf{w}_3$.

3	

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione f è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Motivazione:

2	

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione f è un isomorfismo di spazi vettoriali

Motivazione:

2	

(c) Scelto k tra i valori positivi trovati al punto (a), calcolare la dimensione di $\ker f$ e determinarne, se esiste, una base.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (1, 2)$ e $B := (4, 6)$.

2	

(a) Determinare le coordinate di un punto C tale che il triangolo ABC sia equilatero.

Motivazione:

2	

(b) Determinare le coordinate di due punti D e E tali che il quadrilatero $ABDE$ sia un quadrato.

Motivazione:

3	

(c) Determinare le equazioni della circonferenza inscritta e della circonferenza circoscritta al quadrato $ABDE$.

Motivazione:

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, si considerino i punti $A := (1, 1, -1)$, $B := (-1, -1, 1), C := (-2, 1, 0)$ e $D := (1, 2, 3)$.

2	

(a) Determinare il piano π passante per A, B e C e la sfera $\mathcal{S}$ di centro D e raggio uguale a 6.

Motivazione:

2	

(b) Determinare raggio e centro della circonferenza $\mathcal{C}$ intersezione della sfera $\mathcal{S}$ con il piano π.

Motivazione:

3	

(c) Determinare, se esiste, una sfera diversa da $\mathcal{S}$ di raggio uguale a 6 intersecante il piano π nella circonferenza $\mathcal{C}$.

Motivazione: