

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Verificare l'esattezza o meno delle seguenti affermazioni:

2

(a) Se una matrice A di ordine 3 è simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ allora $A = B$.

L'affermazione è vera. L'affermazione è falsa.

Motivazione:

2

(b) Esiste una sola matrice A' di ordine 3 avente l'autospazio $E(4)$ relativo all'autovalore 4 di dimensione uguale a 3.

L'affermazione è vera. L'affermazione è falsa.

Motivazione:

2. Siano dati in \mathbb{R}^5 il punto P di coordinate $(2, -1, 0, -1, 2)$, il punto R di coordinate $(1, 3, 1, 2, -1)$ e la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 + t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 + t \\ x_5 = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2

- (a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Π ortogonale alla retta r e passante per il punto P .

Motivazione:

2

- (b) Trovare i punti Q della retta r tali che il segmento QR abbia lunghezza $\sqrt{3}$ e intersechi Π .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} kx + 2ky = k \\ 3kx + 6ky = 3k \\ 2kx - y = k + 1 \end{cases}$$

2

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha che la coppia $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ è una soluzione di Σ .

Motivazione:

3

(b) Determinare il numero di soluzioni di Σ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Motivazione:

2

(c) Posto $k = 0$, trovare tutte le soluzioni del sistema Σ .

Motivazione:

4. Si consideri l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avente come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & k \end{pmatrix}$.

2

- (a) Calcolare $\dim \ker f$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Motivazione:

3

- (b) Posto $k = 1$, determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f . Dire inoltre se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva (cioè biunivoca).

Motivazione:

2

- (c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati la retta r di equazione $x-y+3=0$ e il punto P di coordinate $(3,2)$.

2

(a) Scrivere un'equazione cartesiana della retta s passante per P e ortogonale a r .

Motivazione:

2

(b) Scrivere un'equazione cartesiana della circonferenza di centro P e tangente alla retta r .

Motivazione:

3

(c) Determinare le coordinate di due punti A e B di r , tali che il triangolo ABP sia isoscele di base AB e abbia area uguale a 12.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti A di coordinate $(-1, 2, 2)$, B di coordinate $(0, 0, 1)$ e C di coordinate $(3, -3, 1)$.

2

- (a) Scrivere le coordinate del centro K della circonferenza passante per A, B e C .

Motivazione:

3

- (b) Calcolare l'area del triangolo ABC .

Motivazione:

2

- (c) Scrivere l'equazione della sfera di centro A e tangente al piano xy .

Motivazione: