COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato un sistema di riferimento affine nel piano, sia dato il punto A di coordinate $(1, 2)$ sia r la retta passante per A parallela all'asse delle ordinate.

2 (a) Determinare la disequazione che definisce il semipiano delimitato dalla retta r che **NON** contiene l'origine O del sistema di riferimento.

Motivazione:

2 (b) Determinare le condizioni soddisfatte da tutti e soli i punti interni al triangolo di vertici O, A e B, dove B è il punto di intersezione della retta r con l'asse delle ascisse.

2	

2. (a) Ogni matrice A di ordine 2 a elementi reali avente solo due autovalori, uno uguale a 4 e l'altro uguale a 5, è diagonalizzabile? Nel caso in cui la risposta sia positiva dimostrarlo. Nel caso in cui nessuna di esse lo sia, dimostrarlo. Nel caso in cui alcune siano diagonalizzabili e altre no, determinare un esempio di una tale matrice non diagonale che sia diagonalizzabile e un esempio di una tale matrice non diagonalizzabile. Giustificare le risposte.

Motivazione:

2	

(b) Ogni matrice A di ordine 3 a elementi reali avente solo due autovalori, uno uguale a 4 e l'altro uguale a 5, è diagonalizzabile? Nel caso in cui la risposta sia positiva dimostrarlo. Nel caso in cui nessuna di esse lo sia, dimostrarlo. Nel caso in cui alcune siano diagonalizzabili e altre no, determinare un esempio di una tale matrice non diagonale che sia diagonalizzabile e un esempio di una tale matrice non diagonalizzabile. Giustificare le risposte.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 2k^2 - 4k\}.$$

Sia F il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (1, 3, 1)$ e $\mathbf{v} := (2, 1, 1)$

2 (a) Determinare i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Motivazione:

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

3 (b) Determinare una base per $E_k \cap F$.

Motivazione:

2 (c) Determinare una base ortonormale di E_k rispetto al prodotto scalare standard.

4. Sia data la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ k+3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con k parametro reale.

3

(a) Per quali valori di k esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}A_kN$ sia una matrice diagonale?

Motivazione:

1

(b) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia una matrice diagonale?

Motivazione:

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto:

3

(c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, sia data la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $(x-5)^2 + (y-3)^2 - 9 = 0$.

3	

(a) Scrivere le equazioni delle rette tangenti a $\mathcal{C}$ condotte dal punto O, origine del sistema di riferimento.

Motivazione:

2	

(b) Scrivere un'equazione cartesiana della retta r passante per il centro C della circonferenza $\mathcal{C}$ perpendicolare alla retta s passante per i punti $P_1 := (2,3)$ e $P_2 := (1,1)$.

Motivazione:

2	

(c) Determinare tutti i punti B sull'asse delle ascisse tale che il triangolo OBC abbia area uguale a 21.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto A di coordinate $(1, 2, -1)$, il punto B di coordinate $(2, -1, 1)$ e il piano π di equazione $2x + y - z = 0$.

2 (a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta passante per i punti A e B.

Motivazione:

2 (b) Scrivere un'equazione cartesiana del piano α passante per i punti A e B e parallelo al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$.

Motivazione:

3 (c) Determinare la distanza tra i piani π_1 e π_2, entrambi paralleli al piano π, e passanti rispettivamente per il punto A e per il punto B.

Motivazione: