COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni.

2 (a) Se $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ è invertibile allora $2A$ è invertibile.

Motivazione:

2 (b) Se $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ è diagonalizzabile allora anche $2A$ è diagonalizzabile.

Motivazione:

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il punto P_0 di coordinate $(2, 2, 2, 2)$, il punto P_1 di coordinate $(3, 2, 2, 2)$, il punto P_2 di coordinate $(4, 2, 3, 2)$, il punto P_3 di coordinate $(5, 2, 3, 4)$. Sia Σ l'inviluppo affine dei punti P_0, P_1, P_2, P_3.

| 2 | |

(a) Determinare la dimensione di Σ. Determinare delle equazioni parametriche di Σ.

Motivazione:

| 2 | |

(b) Determinare una disequazione verificata dalle coordinate di tutti e soli i punti del semispazio aperto di $\mathbb{R}^4$ delimitato da Σ e contenente il punto A di coordinate $(2, 3, 4, 5)$.

Motivazione:

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato, relativamente alla base canonica, alla matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(a) Il vettore $\mathbf{v} := (1, 1, 2)$ appartiene all'immagine di f? ☐ Sì ☐ No

Motivazione:

| 3 | |

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (NOTA: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti).

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

| 2 | |

(c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

4. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Sia f l'endomorfismo di V tale che $f(\mathbf{e}_1) = k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, con $k \in \mathbb{R}$.

2

(a) Determinare tutti i valori di k per i quali l'endomorfismo f è suriettivo.

Motivazione:

2

(b) Posto $k = 1$, determinare il nucleo di f.

Motivazione:

3

(c) Posto $k = 2$, determinare $f^{-1}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati il punto A di coordinate $(1, 2)$ e C di coordinate $(3, 4)$.

2	

(a) Determinare i punti B e D in modo tale che il quadrilatero Q avente come vertici ordinati A, B, C e D sia un quadrato avente i lati paralleli agli assi coordinati.

Motivazione:

3	

(b) Determinare un'equazione della circonferenza inscritta nel quadrato Q.

Motivazione:

2	

(c) Determinare un'equazione della circonferenza che ha il centro nel punto medio del segmento AC e che delimita un cerchio avente come area la metà dell'area del quadrato Q.

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, sia data la sfera Σ di centro il punto K di coordinate $(1, 0, 1)$ e tangente al piano π di equazione $x - 2y + z + 1 = 0$.

2 (a) Determinare il punto T di tangenza della sfera Σ con il piano π.

Motivazione:

2 (b) Determinare il raggio di Σ.

Motivazione:

3 (c) Determinare i piani α e β paralleli a π che intersecano Σ in circonferenze di raggio uguale alla metà del raggio di Σ.

Motivazione: