COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni.

2 (a) Comunque sia fissato un vettore $\mathbf{v} \in E$, l'insieme $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 + \mathbf{v}, \mathbf{e}_4 + \mathbf{v}\}$ è una base di E.

Motivazione:

2 (b) Comunque siano fissati i numeri reali k_2, k_3, k_4, l'insieme $\{\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 + k_4\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ è una base di E.

Motivazione:

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il punto A di coordinate $(1, 2, 3, 4)$ e l'iperpiano $\Sigma : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$.

2	

(a) Determinare il punto B di intersezione dell'iperpiano Σ con la retta r passante per A e perpendicolare a Σ.

Motivazione:

2	

(b) Determinare la semiretta aperta con origine in B e passante per A.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(a + bx + cx^2) = a + 2c + (2a + c)x + (a + 2c)x^2$.

| 2 | |

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}^3[x]$.

Motivazione:

| 3 | |

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (NOTA: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

| 2 | |

(c) Determinare, se esistono, una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

Motivazione:

4. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema:

$$S : \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 6y + kz = 3 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \end{cases}$$

2	

(a) Determinare tutti i valori di k per i quali il sistema ammette una sola soluzione.

Motivazione:

2	

(b) Determinare tutti i valori di k per i quali il sottospazio affine delle soluzioni di S ha dimensione uguale a 2.

Motivazione:

3	

(c) Posto $k = 0$, determinare tutte le soluzioni del sistema.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati il punto A di coordinate $(3, 2)$ e il punto B di coordinate $(7, 4)$.

2 (a) Determinare un'equazione cartesiana dell'asse s del segmento AB.

Motivazione:

2 (b) Determinare l'area del trapezio $ABB'A'$ dove A' e B' sono le proiezioni ortogonali sull'asse delle ascisse dei punti A e B rispettivamente.

Motivazione:

3 (c) Determinare sull'asse delle ascisse tutti i punti C tali che l'area del triangolo ABC sia uguale a 6.

Motivazione:

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati il punto A di coordinate $(2, -1, 1)$, il punto B di coordinate $(0, 1, 2)$ e il punto C di coordinate $(-1, 2, 3)$.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.

Motivazione:

2	

(b) Sia r la retta passante per A e B. Determinare un'equazione cartesiana del piano α passante per il punto A e ortogonale alla retta r.

Motivazione:

3	

(c) Determinare le coordinate del centro della circonferenza passante per A, B e C.

Motivazione: