COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni riguardanti matrici di $GL(n, \mathbb{R})$, cioè matrici invertibili di ordine di n a coefficienti reali.

2 (a) Se A è simile a B, allora A^{-1} è simile a B^{-1}.

Motivazione:

2 (b) Ogni matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$ è simile alla matrice A^{-1}.

Motivazione:

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il punto A di coordinate $(1, 2, 3, 4)$, il punto B di coordinate $(1, 2, 3, 0)$, il punto C di coordinate $(1, 2, 0, 0)$ e il punto D di coordinate $(3, 6, 6, 4)$.

2 (a) Determinare la dimensione del più piccolo sottospazio vettoriale V contenente i punti A, B, C e D.

Motivazione:

2 (b) Determinare la dimensione del più piccolo sottospazio affine Σ contenente i punti A, B, C e D.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $\mathbb{R}^3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore di 3 e sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da $f(a + bx + cx^2) = a + 2c + (2a + c)x + (a + 2c)x^2$.

2

(a) Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}^3[x]$.

Motivazione:

3

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (NOTA: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2

(c) Determinare, se esistono, una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

Motivazione:

4. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:
sottospazio V avente come base $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1, 0)\}$
sottospazio W definito da $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

2	

(a) Determinare una base di W.

Motivazione:

2	

(b) Determinare una base di $V + W$.

Motivazione:

3	

(c) Determinare una base di $V \cap W$.

Motivazione:

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati il punto A di coordinate $(2, 3)$ e i vettori $\mathbf{v}_1 = (2, -1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$.

2 (a) Considerata la retta r parallela al vettore $\mathbf{v}_1$ e passante per il punto A, determinare le coordinate del punto in cui r interseca l'asse delle ascisse.

Motivazione:

2 (b) Considerati i punti A_1 e A_2 simmetrici di A rispettivamente all'asse delle ascisse e all'asse delle ordinate, calcolare l'area del triangolo AA_1A_2.

Motivazione:

3 (c) Considerata la retta s passante per A e parallela a $\mathbf{v}_2$, determinare le coordinate di tutti i punti di s che hanno distanza da A uguale a 2.

Motivazione:

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati i piani $\alpha : x + y - 1 = 0$ e $\beta : x + y + 2z + 1 = 0$.

2	

(a) Determinare i parametri direttori della retta r intersezione dei piani α e β.

Motivazione:

3	

(b) Determinare le coordinate del punto B di intersezione della retta r con il piano π passante per l'origine del sistema di riferimento e perpendicolare alla retta r.

Motivazione:

2	

(c) Descrivere la regione dello spazio delimitata dai piani α e β, contenente il punto C di coordinate $(1, 4, -4)$.

Motivazione: