COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi IN STAMPATELLO negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde a un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde a un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $\mathbb{R}^4[x]$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado minore di 4.
Si consideri l'insieme $A = \{\mathbf{v}_1 = 1+x, \mathbf{v}_2 = 1+x^2, \mathbf{v}_3 = 1+x^3\}$. Dimostrare che è vera o mostrare che è falsa con un controesempio ognuna delle seguenti affermazioni:

2 | (a) Comunque sia fissato un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4[x]$, l'insieme $B = A \cup \{\mathbf{v}\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4[x]$.

Motivazione:

2 | (b) Comunque sia fissato un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4[x]$, l'insieme $C = A - \{\mathbf{v}\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4[x]$.

Motivazione:

2. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ il punto A di coordinate $(1,0,0,0)$, il punto B di coordinate $(0,\frac{1}{2},0,0)$, il punto C di coordinate $(0,0,\frac{1}{3},0)$ e il punto D di coordinate $(0,0,0,\frac{1}{4})$.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano Σ passante per i punti A, B, C e D.

Motivazione:

2	

(b) Determinare delle equazioni parametriche della retta passante per il punto E di coordinate $(4,3,2,1)$ perpendicolare a Σ.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia V uno spazio vettoriale avente come base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e sia f l'endomorfismo di V associato, relativamente alla base data, alla matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3	

(a) Determinare una base per ciascun autospazio di f. Utilizzare la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivere un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (NOTA: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$

Motivazione:

2	

(b) Determinare, se esistono, una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

Motivazione:

2	

(c) Determinare , se esistono, una matrice diagonale $D' \neq D$ e una matrice ortogonale N tali che $D' = N^{-1}AN$.

Motivazione:

4. Si consideri il sottospazio vettoriale V di $M(2,2,\mathbb{R})$ definito da: $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d=0 \right\}$.

2	

(a) Determinare una base di V.

Motivazione:

2	

(b) Determinare una base di $V \cap S(2,\mathbb{R})$, dove $S(2,\mathbb{R})$ è il sottospazio delle matrici simmetriche di $M(2,2,\mathbb{R})$:

Motivazione:

3	

(c) Determinare una base di $V + S(2,\mathbb{R})$.

Motivazione:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano dati il punto A di coordinate $(0,-3)$, il punto B di coordinate $(4,3)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = -3-2t \\ y = 3+t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

2 (a) Determinare le coordinate del punto Q del segmento AB tale che la lunghezza del segmento AB sia uguale a 4 volte la lunghezza del segmento AQ.

Motivazione:

2 (b) Determinare un'equazione cartesiana del fascio di rette parallele all'asse del segmento AB.

Motivazione:

3 (c) Determinare sulla retta r tutti i punti C tali che il triangolo ABC sia rettangolo in C.

Motivazione:

6. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, siano dati il punto A di coordinate $(-1, 1, 2)$ e la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

2	

(a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente r e passante per il punto A.

Motivazione:

2	

(b) Determinare le coordinate del punto H proiezione ortogonale del punto A sulla retta r.

Motivazione:

3	

(c) Determinare un'equazione cartesiana del piano α contenente la retta r e parallelo al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$.

Motivazione: