

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Date due matrici ortogonali  $A$  e  $B$ , dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2

(a) La matrice  $AB$  è ortogonale.

--

Motivazione:

--

2

(b) La matrice  $A + B$  è ortogonale.

--

Motivazione:

--

2. In  $\mathbb{R}^4$  siano dati i punti  $P_0 := (10, 0, 0, 0)$ ,  $P_1 := (9, 1, 0, 0)$ ,  $P_2 = (8, 1, 1, 0)$  e  $P_3 := (7, 1, 1, 1)$ .

2

(a) Dimostrare che l'involuppo affine  $\Sigma$  dei punti  $P_0, P_1, P_2, P_3$  è un iperpiano.

Dimostrazione:

2

(b) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano  $\Sigma$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia dato in  $M(2, 2, \mathbb{R})$  il sottospazio vettoriale  $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$ .

2

(a) Determinare una base per  $E$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di  $E \cap S(\mathbb{R}, 2)$  dove  $S(\mathbb{R}, 2)$  è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2.

Motivazione:

3

(c) Determinare una base di  $E + S(2, \mathbb{R})$ .

Motivazione:

4. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determinare una base dell'immagine di  $f$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base del nucleo di  $f$ .

Motivazione:

3

(c) Determinare una matrice ortogonale  $M$  e una matrice diagonale  $A'$  tali che  $A' = M^{-1}AM$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano, sono dati la retta  $r$  di equazione cartesiana  $x + 2y - 4 = 0$ , il punto  $P := (3, 4)$  e il vettore  $\mathbf{v} := (-1, -1)$ .

2

(a) Determinare le coordinate della proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sulla retta  $r$ .

Motivazione:

3

(b) Detta  $s$  la retta parallela al vettore  $\mathbf{v}$  e passante per il punto  $P$ , determinare sulla retta  $s$  tutti i punti aventi distanza dalla retta  $r$  uguale a  $\sqrt{5}$ .

Motivazione:

2

(c) Determinare le equazioni delle bisettrici della retta  $r$  e dell'asse delle  $x$ .

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti  $A := (0, -2, 2)$ ,  $B := (2, 2, 4)$  e  $C := (3, 0, -3)$ .

2

- (a) Determinare tutti i valori del parametro  $h$  per cui il punto  $P := (h, 2h+1, 5h+4)$  è complanare con i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Motivazione:

3

- (b) Scrivere in equazioni cartesiane la retta ortogonale al piano contenente i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  e passante per il circocentro del triangolo  $ABC$ .

Motivazione:

2

- (c) Determinare se il segmento  $AC$  interseca il piano  $\pi$  di equazione  $x - y + 3z - 5 = 0$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Date due matrici ortogonali  $M$  e  $N$ , dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2

(a) La matrice  $MN$  è ortogonale.

--

Motivazione:

--

2

(b) La matrice  $M + N$  è ortogonale.

--

Motivazione:

--

2. In  $\mathbb{R}^4$  siano dati i punti  $P_0 := (9, 0, 0, 0)$ ,  $P_1 := (8, 1, 0, 0)$ ,  $P_2 := (7, 1, 1, 0)$  e  $P_3 := (6, 1, 1, 1)$ .

2

(a) Dimostrare che l'involuppo affine  $\Sigma$  dei punti  $P_0, P_1, P_2, P_3$  è un iperpiano.

Dimostrazione:

2

(b) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano  $\Sigma$ .

Motivazione:



COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia dato in  $M(2, 2, \mathbb{R})$  il sottospazio vettoriale  $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} h & h' \\ h'' & 2h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R}, h' \in \mathbb{R}, h'' \in \mathbb{R} \right\}$ .

2

(a) Determinare una base per  $E$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di  $E \cap S(\mathbb{R}, 2)$  dove  $S(\mathbb{R}, 2)$  è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2.

Motivazione:

3

(c) Determinare una base di  $E + S(2, \mathbb{R})$ .

Motivazione:

4. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determinare una base dell'immagine di  $f$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base del nucleo di  $f$ .

Motivazione:

3

(c) Determinare una matrice ortogonale  $M$  e una matrice diagonale  $A'$  tali che  $A' = M^{-1}AM$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano, sono dati la retta  $r$  di equazione cartesiana  $2x + y - 4 = 0$ , il punto  $P := (4, 3)$  e il vettore  $\mathbf{v} := (-1, -1)$ .

2

- (a) Determinare le coordinate della proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sulla retta  $r$ .

Motivazione:

3

- (b) Detta  $s$  la retta parallela al vettore  $\mathbf{v}$  e passante per il punto  $P$ , determinare sulla retta  $s$  tutti i punti aventi distanza dalla retta  $r$  uguale a  $\sqrt{5}$ .

Motivazione:

2

- (c) Determinare le equazioni delle bisettrici della retta  $r$  e dell'asse delle  $x$ .

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti  $A := (-2, 0, 2)$ ,  $B := (2, 2, 4)$  e  $C := (0, 3, -3)$ .

2

- (a) Determinare tutti i valori del parametro  $h$  per cui il punto  $P := (2h+1, h, 5h+4)$  è complanare con i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Motivazione:

3

- (b) Scrivere in equazioni cartesiane la retta ortogonale al piano contenente i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  e passante per il circocentro del triangolo  $ABC$ .

Motivazione:

2

- (c) Determinare se il segmento  $AC$  interseca il piano  $\pi$  di equazione  $x - y - 3z + 5 = 0$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Date due matrici ortogonali  $A$  e  $B$ , dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2

(a) La matrice  $A + B$  è ortogonale.

Motivazione:

2

(b) La matrice  $AB$  è ortogonale.

Motivazione:

2. In  $\mathbb{R}^4$  siano dati i punti  $P_0 := (8, 0, 0, 0)$ ,  $P_1 := (7, 1, 0, 0)$ ,  $P_2 = (6, 1, 1, 0)$  e  $P_3 := (5, 1, 1, 1)$ .

2

(a) Dimostrare che l'involuppo affine  $\Sigma$  dei punti  $P_0, P_1, P_2, P_3$  è un iperpiano.

Dimostrazione:

2

(b) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano  $\Sigma$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia dato in  $M(2, 2, \mathbb{R})$  il sottospazio vettoriale  $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} k & k' \\ k'' & 3k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R}, k' \in \mathbb{R}, k'' \in \mathbb{R} \right\}$ .

2

(a) Determinare una base per  $E$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di  $E \cap S(\mathbb{R}, 2)$  dove  $S(\mathbb{R}, 2)$  è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2.

Motivazione:

3

(c) Determinare una base di  $E + S(2, \mathbb{R})$ .

Motivazione:

4. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determinare una base dell'immagine di  $f$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base del nucleo di  $f$ .

Motivazione:

3

(c) Determinare una matrice ortogonale  $M$  e una matrice diagonale  $A'$  tali che  $A' = M^{-1}AM$ .

Motivazione:



COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano, sono dati la retta  $r$  di equazione cartesiana  $x + 2y - 2 = 0$ , il punto  $P := (2, 3)$  e il vettore  $\mathbf{v} := (-1, -1)$ .

2

- (a) Determinare le coordinate della proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sulla retta  $r$ .

Motivazione:

3

- (b) Detta  $s$  la retta parallela al vettore  $\mathbf{v}$  e passante per il punto  $P$ , determinare sulla retta  $s$  tutti i punti aventi distanza dalla retta  $r$  uguale a  $3\sqrt{5}$ .

Motivazione:

2

- (c) Determinare le equazioni delle bisettrici della retta  $r$  e dell'asse delle  $x$ .

Motivazione:

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti  $A := (2, -2, 0)$ ,  $B := (4, 2, 2)$  e  $C := (-3, 0, 3)$ .

- 2  (a) Determinare tutti i valori del parametro  $h$  per cui il punto  $P := (5h+4, 2h+1, h)$  è complanare con i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Motivazione:

- 3  (b) Scrivere in equazioni cartesiane la retta ortogonale al piano contenente i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  e passante per il circocentro del triangolo  $ABC$ .

Motivazione:

- 2  (c) Determinare se il segmento  $AC$  interseca il piano  $\pi$  di equazione  $3x - y + z - 5 = 0$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Date due matrici ortogonali  $M$  e  $N$ , dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

2

(a) La matrice  $M + N$  è ortogonale.

Motivazione:

2

(b) La matrice  $MN$  è ortogonale.

Motivazione:

2. In  $\mathbb{R}^4$  siano dati i punti  $P_0 := (7, 0, 0, 0)$ ,  $P_1 := (6, 1, 0, 0)$ ,  $P_2 = (5, 1, 1, 0)$  e  $P_3 := (4, 1, 1, 1)$ .

2

(a) Dimostrare che l'involuppo affine  $\Sigma$  dei punti  $P_0, P_1, P_2, P_3$  è un iperpiano.

Dimostrazione:

2

(b) Determinare un'equazione cartesiana dell'iperpiano  $\Sigma$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3. Sia dato in  $M(2, 2, \mathbb{R})$  il sottospazio vettoriale  $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$ .

2

(a) Determinare una base per  $E$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base di  $E \cap S(\mathbb{R}, 2)$  dove  $S(\mathbb{R}, 2)$  è il sottospazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2.

Motivazione:

3

(c) Determinare una base di  $E + S(2, \mathbb{R})$ .

Motivazione:

4. Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^4$  che ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determinare una base dell'immagine di  $f$ .

Motivazione:

2

(b) Determinare una base del nucleo di  $f$ .

Motivazione:

3

(c) Determinare una matrice ortogonale  $M$  e una matrice diagonale  $A'$  tali che  $A' = M^{-1}AM$ .

Motivazione:

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

5. Fissato in un piano un sistema di riferimento cartesiano, sono dati la retta  $r$  di equazione cartesiana  $2x + y - 2 = 0$ , il punto  $P := (3, 2)$  e il vettore  $\mathbf{v} := (-1, -1)$ .

2

- (a) Determinare le coordinate della proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sulla retta  $r$ .

--

Motivazione:

--

3

- (b) Detta  $s$  la retta parallela al vettore  $\mathbf{v}$  e passante per il punto  $P$ , determinare sulla retta  $s$  tutti i punti aventi distanza dalla retta  $r$  uguale a  $3\sqrt{5}$ .

--

Motivazione:

--

2

- (c) Determinare le equazioni delle bisettrici della retta  $r$  e dell'asse delle  $x$ .

--

Motivazione:

--

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti  $A := (0, 2, -2)$ ,  $B := (2, 4, 2)$  e  $C := (3, -3, 0)$ .

- 2  (a) Determinare tutti i valori del parametro  $h$  per cui il punto  $P := (h, 5h+4, 2h+1)$  è complanare con i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Motivazione:

- 3  (b) Scrivere in equazioni cartesiane la retta ortogonale al piano contenente i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  e passante per il circocentro del triangolo  $ABC$ .

Motivazione:

- 2  (c) Determinare se il segmento  $AC$  interseca il piano  $\pi$  di equazione  $x + 3y - z - 5 = 0$ .

Motivazione: