COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine.

2 (a) Se A e B sono invertibili allora la matrice $A + B$ è invertibile:

☐ vero ☒ falso

Se la risposta è 'vero' spiega perché, se la risposta è 'falso' mostra con un controesempio perché è falso.

La matrice identica I è invertibile. Anche l'opposta $-I$ è invertibile. La somma di I con $-I$ è la matrice nulla che non è invertibile.

2 (b) Se A è invertibile allora la matrice A^2 è invertibile:

☒ vero ☐ falso

Se la risposta è 'vero' spiega perché, se la risposta è 'falso' mostra con un controesempio perché è falso.

Poiché A è invertibile, sappiamo che $\det A \neq 0$. Per il teorema di Binet

$$\det\left(A^2\right) = (\det A)^2 \neq 0,$$

e, dunque, A^2 è invertibile.

2. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano e sia dato il punto $P := (x_0, y_0, z_0)$.

2	

(a) Determina il simmetrico H del punto P rispetto al piano $\pi : z = 0$.

$\boxed{H = (x_0, y_0, -z_0)}$

Motivazione:

La retta passante per P e ortogonale a π ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t \end{cases}$.

Intersecando questa retta con il piano π si trova il punto $Q := (x_0, y_0, 0)$. Il punto H è il punto dello spazio tale che Q sia il punto medio di P e H: dunque se $H := (x_1, y_1, z_1)$ si ha $\frac{x_0+x_1}{2} = x_0$, $\frac{y_0+y_1}{2} = y_0$ e $\frac{z_0+z_1}{2} = 0$.

2	

(b) Determina il simmetrico K del punto P rispetto alla retta $r : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

$\boxed{K = (x_0, -y_0, -z_0)}$

Motivazione:

Il piano passante per P e ortogonale a r ha equazione cartesiana $x - x_0 = 0$. Intersecando questo piano con la retta r si trova il punto $R := (x_0, 0, 0)$. Il punto K è il punto dello spazio tale che R sia il punto medio di P e K: dunque se $K := (x_2, y_2, z_2)$ si ha $\frac{x_0+x_2}{2} = x_0$, $\frac{y_0+y_2}{2} = 0$ e $\frac{z_0+z_2}{2} = 0$.

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

3. Si considerino i due blocchi di condizioni:

$$C_1 : \begin{cases} f(1,1,0) := (2,-1) \\ f(0,1,1) := (3,0) \\ f(1,2,1) := (2,-1) \end{cases} \qquad C_2 : \begin{cases} f(1,1,0) := (2,-1) \\ f(0,1,1) := (3,0) \\ f(1,-2,1) := (2,-1) \end{cases}$$

| 3 | |

(a) Per uno solo di questi due blocchi di condizioni esiste un unico omomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ che verifica tali condizioni. Indica quale blocco:

☐ C_1 ☒ C_2

Motivazione:

I vettori $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,2,1)$ non formano una base di $\mathbb{R}^3$, mentre i vettori $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,-2,1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Nel resto dell'esercizio sia f l'omomorfismo determinato al punto precedente.

| 2 | |

(b) L'omomorfismo f è iniettivo?

☐ sì ☒ no

Motivazione:

La dimensione dello spazio di partenza è maggiore della dimensione dello spazio di arrivo.

| 2 | |

(c) L'omomorfismo f è suriettivo?

☒ sì ☐ no

Motivazione:

L'immagine di f è generata dai vettori $f(1,1,0)$, $f(0,1,1)$ e $f(1,-2,1)$, cioè dai vettori $(2,-1)$, $(3,0)$ e $(2,-1)$. I vettori $(2,-1)$ e $(3,0)$ sono linearmente indipendenti, dunque generano uno spazio di dimensione 2, cioè tutto $\mathbb{R}^2$.

4. Sia A la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4	

(a) Determina gli autovalori di A e, per ciascuno di essi una base per il corrispondente autospazio. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(1, 2, 0)$
-1	$(2, 4, 1)$

3	

(b) A è diagonalizzabile?

☐ sì ☒ no

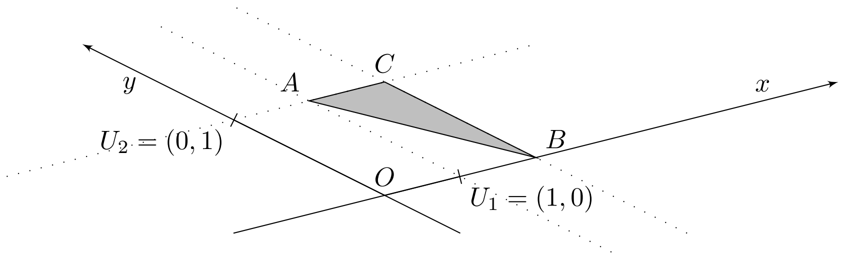
Motivazione:

La somma delle dimensioni degli autospazi è 2, cioè è inferiore a 3.

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

5. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento affine. Sia O l'origine di questo riferimento, sia U_1 il punto unità dell'asse delle x e sia U_2 il punto unità dell'asse delle y. Si considerino i punti A, B e C dati in figura (i trattini sugli assi corrispondono ai punti unità):



1 (a) Le coordinate dei punti A, B e C rispetto al sistema di riferimento fissato sono:

$\boxed{A = (1,1),\ B = (2,0),\ C = (2,1)}$

2 (b) La retta passante per i punti A e B ha equazione cartesiana:

$\boxed{x + y - 2 = 0}$

Motivazione:

Si può usare la formula: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 \\ 2-1 & 0-1 \end{vmatrix} = 0$

2 (c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ x - 2 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

2 (d) Il punto D tale che il quadrilatero $ABCD$ (attenzione all'ordine dei vertici!) sia un parallelogramma ha coordinate:

$\boxed{D = (1,2)}$

Motivazione:

La retta r passante per A e parallela alla retta BC ha equazione $x - 1 = 0$. La retta s passante per C e parallela alla retta AB ha equazione $x + y - 3 = 0$. Il punto D si ottiene come intersezione della retta r e della retta s.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (0, 2, 4)$, $B := (h, 1, 0)$, $C := (1, k, 8)$.

2 | (a) i tre punti sono allineati se e solo se:

$h = -1$ e $k = 3$

Motivazione:

I tre punti sono allineati se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} h-0 & 1-2 & 0-4 \\ 1-0 & k-2 & 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -1 & -4 \\ 1 & k-2 & 4 \end{pmatrix}$$

ha rango 1.

Nel resto dell'esercizio utilizza i valori dei parametri h e k determinati al punto precedente.

1 | (b) La retta r che passa per i punti A, B e C ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = -4t \end{cases}$$

2 | (c) La retta r determinata al punto precedente ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 4y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

2 | (d) Il piano π passante per il punto A e perpendicolare alla retta r ha equazione cartesiana:

$x + y + 4z - 18 = 0$

Motivazione:

Il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è perpendicolare alla retta r se e solo se (a, b, c) sono proporzionali ai parametri direttori di r. Possiamo allora scegliere $a = 1$, $b = 1$, $c = 4$. Imponendo il passaggio per A troviamo poi $d = -18$.