COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V uno spazio vettoriale.

[2] (a) Siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ vettori linearmente indipendenti di V. Siano $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Allora:

☐ $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ sono linearmente indipendenti
☒ $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ sono linearmente dipendenti
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ sono linearmente dipendenti

Motivazione:

Dire che i vettori $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ sono combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ è equivalente a dire che appartengono al sottospazio vettoriale E di V generato da $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$: poiché questi ultimi sono linearmente indipendenti, il sottospazio E ha dimensione 3.
Comunque scelti 4 vettori in uno spazio vettoriale di dimensione 3, essi sono linearmente dipendenti.

[2] (b) Siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ vettori linearmente indipendenti di V. Siano $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$. Allora:

☐ $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ sono linearmente indipendenti
☐ $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ sono linearmente dipendenti
☒ i dati assegnati non permettono di stabilire se $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ sono linearmente dipendenti

Motivazione:

Dire che i vettori $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$ sono combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ è equivalente a dire che appartengono al sottospazio vettoriale F di V generato da $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$: poiché questi ultimi sono linearmente indipendenti, il sottospazio F ha dimensione 4.
Scelti 3 vettori in uno spazio vettoriale di dimensione 4, essi possono essere sia linearmente indipendenti che dipendenti: dipende dai vettori.

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano siano date le rette:

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Sia verificata la condizione $a_1m + b_1n + c_1p = 0$. Allora:

| 2 | |

(a)
- ☐ le rette r e s sono parallele
- ☐ le rette r e s non sono parallele
- ☒ i dati assegnati non permettono di stabilire se le rette r e s sono parallele

Motivazione:

La retta r è contenuta nei piani $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ e $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$, dunque è ortogonale ai vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2).
I parametri direttori di s sono (m, n, p). Dunque r e s sono parallele se e solo se il vettore (m, n, p) è ortogonale sia a (a_1, b_1, c_1) che a (a_2, b_2, c_2), cioè se e solo se sono verificate entrambe le relazioni $a_1m + b_1n + c_1p = 0$ e $a_2m + b_2n + c_2p = 0$. Poiché non sappiamo se $a_2m + b_2n + c_2p = 0$ i dati assegnati non sono sufficienti a stabilire se r e s sono parallele.

| 2 | |

(b)
- ☐ le rette r e s sono ortogonali
- ☐ le rette r e s non sono ortogonali
- ☒ i dati assegnati non permettono di stabilire se le rette r e s sono ortogonali

Motivazione:

La retta r è contenuta nel piano di equazione $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ e dunque è ortogonale al vettore (a_1, b_1, c_1).
I parametri direttori di s sono (m, n, p): la condizione $a_1m + b_1n + c_1p = 0$ implica che s è ortogonale al vettore (a_1, b_1, c_1).
L'informazione che abbiamo è, dunque, che r e s sono ortogonali allo stesso vettore. Questo non ci permette di dire né che r e s sono ortogonali né che r e s non sono ortogonali: ad esempio le rette contenute nel piano xy sono tutte ortogonali all'asse delle z, ma tra esse vi sono sia rette tra loro ortogonali sia rette tra loro non ortogonali.

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$E_k := \{(x, y, z, w) \mid x + k^2 y - z = k - 2\}$$

2	

(a) Determina il valore di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$k = 2$

Motivazione:

Il sottoinsieme E_k è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare nelle incognite x, y, z e w. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio se e solo se il sistema lineare è omogeneo. Nel caso in questione ciò avviene se e solo se $k - 2 = 0$.

Nel resto dell'esercizio utilizza il valore di k determinato al punto precedente.

3	

(b) Determina una base ortonormale di E_k.

$(0, 0, 0, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)$

2	

(c) Determina una base per un sottospazio F supplementare di E_k in $\mathbb{R}^4$.

$(1, 0, 0, 0)$

Motivazione:

Dal momento che E_k è definito dall'unica equazione $x + 4y - z = 0$, E_k ha dimensione 3. Un sottospazio F ad esso supplementare in $\mathbb{R}^4$ deve avere dimensione uguale a $4 - 3 = 1$. Dobbiamo quindi trovare un singolo vettore non nullo $\mathbf{v}$ tale che il sottospazio generato da $\mathbf{v}$ abbia intersezione con E_k ridotta al vettore nullo. Basta allora scegliere un vettore $\mathbf{v}$ che non appartiene a E_k. Se $\mathbf{v} := (x_1, y_1, z_1, w_1)$ basta che sia $x_1 + 4y_1 - z_1 \neq 0$. Si può scegliere, ad esempio, $x_1 = 1$, $y_1 = z_1 = w_1 = 0$.

4. Sia A la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

1	

(a) Detto f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è A, determina una base del nucleo di f:

$(2, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$

3	

(b) Determina una base per ciascun autospazio di f. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(2, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$
-3	$(1, 2, -4)$

3	

(c) Determina una matrice diagonale A' e una matrice invertibile M tali che $A' = M^{-1}AM$.

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Sulla diagonale della matrice A' abbiamo riportato gli autovalori di A, ciascuno un numero uguale alla dimensione del corrispondente autospazio.
Poiché abbiamo riportato l'autovalore 0 sulla prima e sulla seconda colonna di A', abbiamo riportato sulla prima e seconda colonna di di M le componenti, rispetto alla base canonica, di due vettori che formano una base per l'autospazio relativo a 0.
Poiché abbiamo riportato l'autovalore -3 sulla terza colonna di A', abbiamo riportato sulla terza colonna di M le componenti, rispetto alla base canonica, di un vettore che forma una base per l'autospazio relativo a -3.

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

5. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano. Sia dato al variare del numero reale k il punto $B := (k, 2k)$.

| 2 | |

(a) Determina tutti i valori di k per cui il quadrato di lato OB ha area uguale a 20:

$k = \pm 2$

Motivazione:

L'area del quadrato di lato OB è $\mathrm{d}(O,B)^2 = 5k^2$. Posto $5k^2 = 20$, troviamo $k = \pm 2$.

Scegli uno dei valori di k determinati al punto a e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 2$

| 3 | |

(b) Sia r la retta passante per i punti O e B e sia ρ il semipiano delimitato da r e contenente il punto $P := (0, 1)$. Determina i vertici C e D del quadrato $OBCD$ contenuto in ρ.

$C = (-2, 6)$ $D = (-4, 2)$

Motivazione:

La retta r ha equazione $2x - y = 0$. Il semipiano ρ, dovendo contenere P, è definito dalla disequazione $2x - y < 0$.
Il punto D giace sulla retta s ortogonale a r e passante per O, e ha distanza uguale a $\sqrt{20}$ dal punto O. La retta s ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}$.
Il punto generico della retta s ha allora coordinate $(2t, -t)$. La sua distanza da O è $\sqrt{5t^2}$. Imponendo che questa distanza sia $\sqrt{20}$ troviamo i valori 2 e -2 per il parametro t, e, quindi, i due punti $(4, -2)$ e $(-4, 2)$. Scelgo tra questi quello appartenente al semipiano σ, e determino così D.
La retta parallela a r e passante per D ha equazione $2x - y + 10 = 0$. La retta parallela a s e passante per B ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - t \end{cases}$ Intersecando queste due rette si trova C.

| 2 | |

(c) Determina l'equazione cartesiana della circonferenza passante per i punti O, B, C e D trovati al punto precedente.

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$

Motivazione:

Il centro della circonferenza è il punto medio di O e C, dunque il centro è $(-1, 3)$. Il raggio della circonferenza è dato dalla distanza del centro da uno qualsiasi dei punti della circonferenza, ad esempio il punto $(0, 0)$. Dunque il raggio è $\sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il piano $\pi : x - 3y + 2z - 3 = 0$, il punto $P := (2, -1, 6)$ e la sfera $S : (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 18$.

2

(a) Determina la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π.

$\boxed{H = (1, 2, 4)}$

Motivazione:

La retta s passante per P e ortogonale al piano π ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$

Intersecando questa retta con il piano π troviamo l'equazione

$$(2 + t) - 3(-1 - 3t) + 2(6 + 2t) - 3 = 0,$$

ovvero $14t + 14 = 0$, la cui soluzione è -1. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di s troviamo le coordinate del punto H.

3

(b) Detta γ la circonferenza intersezione di π e S, determina il raggio r e il centro C di γ.

$\boxed{r = 2}$ $\boxed{C = (1, 2, 4)}$

Motivazione:

Notiamo che il centro della sfera è il punto P. Il centro di γ è allora la proiezione ortogonale di P su π, vale a dire il punto H già determinato.
Per trovare il raggio di γ, notiamo che, detto R un qualsiasi punto di γ, il triangolo PCR è rettangolo in C. Abbiamo allora:

$$\mathrm{d}(C, R)^2 = \mathrm{d}(P, R)^2 - \mathrm{d}(P, C)^2.$$

Ora $\mathrm{d}(C, R)$ è il raggio di γ e $\mathrm{d}(P, R)$ è il raggio di $\mathcal{C}$, cioè $\sqrt{18}$. Possiamo calcolare facilmente la distanza di P da C: è $\sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{14}$. Dunque il raggio della circonferenza è

$$r = \sqrt{18 - 14} = 2.$$

2

(c) Determina l'equazione cartesiana di una sfera S', diversa da S, la cui intersezione con il piano π è la circonferenza γ.

$\boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4}$

Motivazione:

Si può scegliere una qualsiasi sfera il cui centro sta sulla retta s e il cui raggio è calcolato opportunamente. Se scegliamo come centro il punto C, dobbiamo prendere la sfera di raggio uguale al raggio della circonferenza γ, cioè 2.