COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5. Siano E ed F due sottospazi vettoriali di V di dimensioni rispettive 3 e 4.

2 (a) Determina la minima e la massima dimensione possibile per la somma $E + F$.

$\boxed{4 \leq \dim(E + F) \leq 5}$

Motivazione:

La somma di E con F deve contenere sia E che F, quindi deve avere dimensione maggiore o uguale sia della dimensione di E che della dimensione di F. Dunque $\dim(E + F) \geq 4$.
La dimensione della somma non può eccedere la somma delle dimensioni di E e F cioè 7. D'altra parte $E + F$ è un sottospazio di V che ha dimensione 5: pertanto $E + F$ ha dimensione al più 5.

2 (b) Determina la minima e la massima dimensione possibile per l'intersezione $E \cap F$.

$\boxed{2 \leq \dim(E \cap F) \leq 3}$

Motivazione:

Dalla formula di Grassmann abbiamo $\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F)$, cioè $\dim(E \cap F) = 7 - \dim(E + F)$. Dunque se $\dim(E + F) = 4$ abbiamo $\dim(E \cap F) = 3$, se $\dim(E + F) = 5$ abbiamo $\dim(E \cap F) = 2$.

2. Siano A e B due matrici quadrate. Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo che è autovettore di A relativamente all'autovalore 2 ed è autovettore di B relativamente all'autovalore -6.

2	

(a) Si consideri la matrice $-3A$.

☒ il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di $-3A$ relativamente all'autovalore $\boxed{-6}$
☐ il vettore $\mathbf{v}$ non è autovettore di $-3A$
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di $-3A$ oppure no

Motivazione:

Sappiamo che $A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$. Dunque $(-3A)\mathbf{v} = -3(A\mathbf{v}) = -3(2\mathbf{v}) = 6\mathbf{v}$.

2	

(b) Si consideri la matrice $A + B$.

☒ il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di $A + B$ relativamente all'autovalore $\boxed{-4}$
☐ il vettore $\mathbf{v}$ non è autovettore di $A + B$
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di $A + B$ oppure no

Motivazione:

Sappiamo che $A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ e $B\mathbf{v} = -6\mathbf{v}$. Dunque $(A + B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = 2\mathbf{v} - 6\mathbf{v} = -4\mathbf{v}$.

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

3. Sia dato l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4[x]$ così definito:

$$f(a, b, c) := b + (a + b + 2c)x + (2a + b + 4c)x^2 + 2bx^3.$$

| 1 | |

(a) Determina la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4[x]$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

| 2 | |

(b) Determina una base del nucleo di f.

$(-2, 0, 1)$

Motivazione:

Un vettore (a, b, c) appartiene al nucleo se e solo se $f(a, b, c) = 0$, cioè se e solo se

$$b + (a + b + 2c)x + (2a + b + 4c)x^2 + 2bx^3 = 0.$$

Si ottiene così il sistema $\begin{cases} b = 0 \\ a + b + 2c = 0 \\ 2a + b + 4c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases}$ le cui soluzioni sono $(-2h, 0, h)$ al variare di h in $\mathbb{R}$. Si ottiene una base di $\ker f$ scegliendo, ad esempio, $h = 1$.

| 2 | |

(c) Determina la matrice rappresentativa dell'omomorfismo f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (2, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 := (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 := (1, 0, 0)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^4[x]$.

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

| 2 | |

(d) Determina $f^{-1}(1 + 2x + 3x^2 + 2x^3)$

$\{(1 - 2h, 1, h) \mid h \in \mathbb{R}\}$

4. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -k^2 & 2 \end{pmatrix}$.

| 1 | |

(a) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ sia una matrice diagonale?

$k = -1$

Motivazione:

Una matrice si può diagonalizzare per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se è simmetrica. La matrice A è simmetrica se e solo se $k = -1$.

Scegliere uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = -1$

| 2 | |

(b) Determina una base per ciascun autospazio di f. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
3	$(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$
0	$(1, 1, 1)$

| 3 | |

(c) Determina una matrice diagonale A' e una matrice ortogonale M tali che $A' = M^{-1}AM$.

$A' := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

| 1 | |

(d) Esiste una matrice **non** ortogonale N tale che $N^{-1}AN$ sia diagonale? Se sì, scrivere una tale matrice, se no, spiegare perché non esiste.

$N := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	☐ Non esiste una matrice N siffatta. Infatti:

COGNOME .... NOME ....

N. MATRICOLA ....

5. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano date le tre rette $r_1 : 3x - y - 3 = 0$, $r_2 : x - 3 = 0$ e $r_3 : kx + 3y - 11 = 0$, con k parametro reale.

2 | (a) Determina il valore di k per cui le rette r_1, r_2 e r_3 appartengono allo stesso fascio di rette.

$k = -\frac{7}{3}$

Motivazione:

Le rette r_1 e r_2 si intersecano nel punto $(3, 6)$. Imponendo il passaggio di r_3 per questo punto troviamo la condizione $3k + 18 - 11 = 0$ da cui ricaviamo $k = -\frac{7}{3}$.

2 | (b) Determina il valore di k per cui le rette r_1 e r_3 sono ortogonali.

$k = 1$

Motivazione:

Il vettore $(3, -1)$ è ortogonale a r_1, il vettore $(k, 3)$ è ortogonale a r_2. Imponendo l'ortogonalità tra questi due vettori otteniamo la condizione $3k - 1 \cdot 3 = 0$, da cui segue $k = 1$.

Nel resto dell'esercizio utilizzare il valore di k determinato al punto (b) (r_1 e r_3 ortogonali).

2 | (c) L'insieme dei punti interni al triangolo T individuato dalle rette r_1, r_2 e r_3 è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3x - y - 3 > 0 \\ x - 3 < 0 \\ x + 3y - 11 > 0 \end{cases}$$

1 | (d) L'area del triangolo T è:

$\frac{5}{3}$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati i punti $A := (0,4,2)$ e $B := (3,6,0)$ e la retta $r : \begin{cases} y + 3z + 3 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$.

2 | (a) Determina l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti A, B e parallelo alla retta r

$4x - y + 5z - 6 = 0$

Motivazione:

Il generico piano passante per A ha equazione $a(x-0) + b(y-4) + c(z-2) = 0$. Imponendo il passaggio per B otteniamo la condizione $3a + 2b - 2c = 0$, da cui ricaviamo $c = \frac{3}{2}a + b$. Il generico piano passante per i punti A e B ha equazione: $ax + by + \left(\frac{3}{2}a + b\right)z - 3a - 6b = 0$. Questo piano è parallelo a r se e solo se non è incidente a r cioè se e solo se il sistema:

$$\begin{cases} y + 3z + 3 = 0 \\ x - y - z = 0 \\ ax + by + \left(\dfrac{3}{2}a + b\right) z - 3a - 6b = 0 \end{cases}$$

non è Crameriano, cioè se e solo se $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ a & b & \frac{3}{2}a + b \end{vmatrix} = 0$, cioè $\frac{1}{2}a + 2b = 0$. Ponendo $a = 4$ e $b = -1$ troviamo l'equazione del piano cercato.

2 | (b) Determina l'equazione cartesiana del piano σ passante per il punto A e ortogonale alla retta r

$-2x - 3y + z + 10 = 0$

Motivazione:

Risolvendo il sistema che dà le equazioni cartesiane di r possiamo determinare le equazioni parametriche di r: $\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = -3 - 3t \\ z = t \end{cases}$ Dunque r ha parametri direttori $(-2, -3, 1)$. Il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è perpendicolare alla retta r se e solo se (a, b, c) sono proporzionali ai parametri direttori di r. Possiamo allora scegliere $a = -2$, $b = -3$, $c = 1$. Imponendo il passaggio per B troviamo poi $d = 10$.

2 | (c) Determina la proiezione ortogonale H del punto B sul piano σ.

$H = (1, 3, 1)$

Motivazione:

La retta s passante per B e ortogonale al piano π ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 6 - 3t \\ z = t \end{cases}$

Intersecando questa retta con il piano π troviamo l'equazione

$$-2(3 - 2t) - 3(6 - 3t) + t + 10 = 0,$$

ovvero $14t - 14 = 0$, la cui soluzione è 1. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di s troviamo le coordinate del punto H.

1 | (d) Determina il simmetrico K del punto B rispetto al piano σ.

$K = (-1, 0, 2)$