COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 7. Sia E un sottospazio vettoriale di V di dimensione 4.

2 (a) Se F è un sottospazio vettoriale di V di dimensione 5, determina la minima dimensione possibile per $E \cap F$.

$\boxed{\dim(E \cap F) \geq 2}$

Motivazione:

Dalla formula di Grassmann sappiamo che

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 9 - \dim(E + F).$$

Dal momento che $\dim(E + F) \leq \dim V = 7$, abbiamo che $\dim(E \cap F) \geq 2$.

2 (b) Se G è un sottospazio vettoriale di V tale che $E \cap G = \{0\}$, determina la massima dimensione possibile per G.

$\boxed{\dim G \leq 3}$

Motivazione:

Dalla formula di Grassmann sappiamo che

$$\dim G = \dim(E + G) + \dim(E \cap G) - \dim E = \dim(E + G) - 4.$$

Dal momento che $\dim(E + G) \leq \dim V = 7$, abbiamo che $\dim G \leq 3$.

2. Sia fissato nello spazio un sistema di riferimento affine.

2	

(a) Siano dati i piani $\pi_1 : 2x - z - 2 = 0$ e $\pi_2 : 2y + z = 0$. Per quali valori del parametro reale k il piano $\pi : 4x - 6y - 5z + k = 0$ appartiene al fascio di piani individuato da π_1 e π_2?

$k = -4$

Motivazione:

Il piano π appartiene al fascio di piani individuato da π_1 e π_2 se e solo se contiene la retta intersezione di π_1 e π_2, vale a dire se e solo se l'intersezione dei tre piani π_1, π_2 e π è una retta. Ciò significa che il sistema $\begin{cases} 2x \qquad - z - 2 = 0 \\ \qquad 2y + z \qquad = 0 \\ 4x - 6y - 5z + k = 0 \end{cases}$ deve avere soluzioni dipendenti da un parametro.

Dunque la matrice del sistema e la matrice completa del sistema devono avere entrambe rango 2. La matrice del sistema è: $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & -5 \end{pmatrix}$. Facendo i calcoli si trova che $\det A = 0$, e, dunque, $\operatorname{rk} A < 3$. D'altra parte il minore B formato dalle prime due righe e due colonne di A ha determinante diverso da 0 e, pertanto $\operatorname{rk} A = 2$. Se consideriamo ora la matrice completa del sistema possiamo limitarci a calcolare i determinanti degli orlati di B che non sono in A. Dobbiamo quindi calcolare il determinante solo del minore $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & k \end{pmatrix}$. Questa matrice ha determinante $4k + 16$ che si annulla se e solo se $k = -4$.

Dunque la matrice completa del sistema ha rango 2 se e solo se $k = -4$.

2	

(b) Siano dati i piani non paralleli $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ appartiene al fascio di piani individuato da π_1 e π_2 se e solo se: (dà una condizione algebrica)

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = 2$$

Motivazione:

Il piano π appartiene al fascio di piani individuato da π_1 e π_2 se e solo se contiene la retta intersezione di π_1 e π_2, vale a dire se e solo se l'intersezione dei tre piani π_1, π_2 e π è una retta. Ciò significa che il sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$ deve avere soluzioni dipendenti da un parametro.

Dunque la matrice del sistema e la matrice completa del sistema devono avere entrambe rango 2.

Notiamo che se la matrice completa del sistema ha rango 2, allora la matrice del sistema ha rango al massimo 2. D'altra parte la matrice del sistema ha rango almeno 2 perché i piani π_1 e π_2 non sono paralleli. Pertanto se la matrice completa del sistema ha rango 2, la matrice del sistema ha automaticamente rango 2.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo definito dalle condizioni $f(1,0,0) := (0,2,0,1)$, $f(0,1,0) := (3,0,2,0)$ e $f(0,0,1) := (0,2,k-k^2,k^2)$, con k parametro reale.

2

(a) Per quali valori di k l'immagine di f ha dimensione 2?

$k = 1$

Motivazione:

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & k-k^2 \\ 1 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$. La dimensione dell'immagine di f è uguale al rango di A. Il minore B formato dalle prime due righe e due colonne di A ha determinante diverso da 0. Dunque $\operatorname{rk} A = 2$ se e solo se gli orlati di B hanno tutti determinante 0.

Gli orlati di B sono $C_1 := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & k-k^2 \end{pmatrix}$ e $C_2 := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$. Si ha $\det C_1 = 6k^2 - 6k$ e $\det C_2 = 6 - 6k^2$. Dunque $\det C_1 = 0$ per $k = 1$ o $k = 0$, mentre $\det C_2 = 0$ per $k = 1$ o $k = -1$. Quindi $\det C_1$ e $\det C_2$ si annullano entrambi solo per $k = 1$.

Scegli uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 1$

2

(b) Determina una base del nucleo di f.

$(-1, 0, 1)$

Motivazione:

Basta risolvere il sistema omogeneo la cui matrice rappresentativa è A. Sappiamo già che A ha rango 2, quindi è sufficiente considerare 2 equazioni indipendenti, ad esempio, quelle corrispondenti alle prime 2 righe di A:

$$\begin{cases} 3y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono $(-t, 0, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Otteniamo una base del nucleo prendendo, ad esempio, $t = 1$.

2

(c) Esistono tre vettori distinti $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ che hanno la stessa immagine tramite f? Se sì, scrivere dei vettori siffatti, se no, spiegare perché non esistono.

☒ Tre vettori siffatti sono, ad esempio:	☐ Non esistono vettori siffatti. Infatti:
$(0,0,0)$, $(-1,0,1)$, $(1,0,-1)$	

4. Sia A la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2	

(a) Detto f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è A, determina una base del nucleo di f:

$(0, 2, 1)$

Motivazione:

Si risolve il sistema associato alla matrice A.

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono $(0, 2t, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Otteniamo una base del nucleo prendendo, ad esempio, $t = 1$.

3	

(b) Determina una base per ciascun autospazio di f. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(0, 2, 1)$
1	$(0, 1, 1)$
2	$(1, 1, 2)$

2	

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (1, 4)$ e $B := (-1, 1)$ e la retta $r : 2x + y - 7 = 0$.

2	

(a) Determina un punto C sulla retta r in modo tale che il triangolo ABC sia rettangolo in B.

$\boxed{C = (5, -3)}$

Motivazione:

La retta s passante per A e B ha parametri direttori $(-1 - 1, 1 - 4) = (-2, -3)$. Una retta ortogonale a s ha quindi parametri direttori $(3, -2)$. La retta n passante per B e ortogonale a s ha allora equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta r troviamo l'equazione $2(-1 + 3t) + (1 - 2t) - 7 = 0$ che ha soluzione $t = 2$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di s troviamo le coordinate del punto C.

2	

(b) La circonferenza γ passante per i punti A, B e C ha equazione cartesiana:

$\boxed{x^2 + y^2 - 6x - y - 7 = 0}$

Motivazione:

Poiché il triangolo ABC è rettangolo, il centro della circonferenza γ passante per i punti A, B e C è il punto medio dell'ipotenusa del triangolo ABC, cioè il punto medio di A e C. Dunque il centro di γ ha coordinate $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+(-3)}{2}\right) = \left(3, \frac{1}{2}\right)$. Il raggio della circonferenza è dato dalla distanza del centro da uno qualsiasi dei punti A, B e C. Calcolando, ad esempio, la distanza tra il centro e A si trova $\sqrt{(1-3)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{65}{4}}$. La circonferenza ha quindi equazione:

$$(x - 3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}.$$

3	

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 > 0 \\ 2x + 3y - 1 > 0 \\ 7x + 4y - 23 < 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (2, 1, 2)$ e le rette $r : \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases}$

2	

(a) Il piano π contenente r e passante per il punto A ha equazione:

$x + 15y - 7z - 3 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si scrive: $\lambda(x + y + 4) + \mu(2y - z - 1) = 0$.
Imponendo il passaggio per A otteniamo la condizione: $\lambda(2 + 1 + 4) + \mu(2 \cdot 1 - 2 - 1) = 0$, vale a dire $7\lambda - \mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 1$ e $\mu = 7$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π.

2	

(b) Il piano σ contenente r e parallelo a s ha equazione:

$x + 5y - 2z + 2 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si può scrivere come: $\lambda x + (\lambda + 2\mu)y - \mu z + 4\lambda - \mu = 0$.
Imponendo la condizione di parallelismo con s, cioè con il vettore $(1, 1, 3)$, otteniamo la relazione $1\lambda + 1(\lambda + 2\mu) + 3(-\mu) = 0$, vale a dire $2\lambda - \mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 1$ e $\mu = 2$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano σ.

3	

(c) Le rette r e s sono:

☐ coincidenti ☐ incidenti ☐ parallele e distinte ☒ sghembe

Motivazione:

Se le rette r e s fossero parallele (coincidenti o distinte), ogni piano passante per r sarebbe parallelo a s. Sappiamo che così non è dal punto precedente. Le rette possono allora essere o incidenti o sghembe.
Cerchiamo un eventuale punto di intersezione tra r e s. Otteniamo il sistema: $\begin{cases} (2 + t) + (1 + t) + 4 = 0 \\ 2(1 + t) - 3t - 1 = 0 \end{cases}$ vale a dire $\begin{cases} 2t + 7 = 0 \\ -t + 1 = 0 \end{cases}$. Questo sistema è, chiaramente, non risolubile. Dunque r e s non hanno punti in comune e sono, perciò, sghembe.