COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nello spazio un sistema di riferimento affine, siano dati il piano $\pi : 3x - 2y + z - 1 = 0$ e i punti $A := (2, -2, 3)$ e $B := (-3, 1, 1)$.

| 2 | |

(a) Determinare la disequazione del semispazio delimitato da π e contenente A e la disequazione del semispazio delimitato da π e contenente B.

Semispazio contenente A: $3x - 2y + z - 1 > 0$ Semispazio contenente B: $3x - 2y + z - 1 < 0$

Motivazione:

I due semispazi delimitati da π sono definiti dalle disequazioni $3x - 2y + z - 1 > 0$ e $3x - 2y + z - 1 < 0$.
Sostituendo le coordinate di A in $3x-2y+z-1$ otteniamo $3\cdot 2-2(-2)+3-1 = 12$. Abbiamo un numero positivo, dunque il semispazio contenente A ha disequazione $3x-2y+z-1 > 0$.
Sostituendo le coordinate di B in $3x-2y+z-1$ otteniamo $3(-3)-2\cdot 1+1-1 = -11$. Abbiamo un numero negativo, dunque il semispazio contenente B ha disequazione $3x-2y+z-1 < 0$.

| 2 | |

(b) Il segmento di estremi A e B interseca il piano π?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

Il segmento di estremi A e B interseca il piano π perché A e B stanno in semispazi delimitati da π diversi.

2. Sia dato un omomorfismo di spazi vettoriali $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$.
Sia $f(1, 2, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$ e $f(0, 1, 2, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

2	

(a) L'omomorfismo f è suriettivo?

☐ sicuramente sì
☒ sicuramente no
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se f è suriettivo o no

Motivazione:

I vettori linearmente indipendenti $(1, 2, 0, 1, 0)$ e $(0, 1, 2, 0, 0)$ appartengono al nucleo di f. Dunque $\ker f$ ha dimensione almeno 2. Poiché $\dim f(\mathbb{R}^5) + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^5 = 5$ si ha che $\dim f(\mathbb{R}^5) \leq 5 - 2 = 3$. Dunque $f(\mathbb{R}^5) \neq \mathbb{R}^4$.

2	

(b) Si consideri il vettore $\mathbf{v} := (1, 0, 0, 0, 0)$ di $\mathbb{R}^5$. Esiste in $\mathbb{R}^5$ un vettore $\mathbf{w}$ diverso da $\mathbf{v}$ tale che $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w})$?

☒ sicuramente sì
☐ sicuramente no
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se esiste un vettore $\mathbf{w}$ o no

Motivazione:

Un vettore $\mathbf{w}$ di $\mathbb{R}^5$ soddisfa l'uguaglianza $f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{v})$ se e solo se $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ con $\mathbf{u} \in \ker f$. Poiché abbiamo già osservato che $\ker f \neq \{\mathbf{0}\}$, esistono vettori verificanti la condizione richiesta.
Uno di essi , per esempio, il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{v} + (1, 2, 0, 1, 0) = (2, 2, 0, 1, 0)$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (0, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v} := (3, 0, 2, 0)$.

3 |

(a) Per quali valori del parametro reale k il vettore $\mathbf{w} := (0, 2, k - k^2, k^2)$ appartiene ad E?

$k = 1$

Motivazione:

I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti, dunque $\dim E = 2$. Il vettore $\mathbf{w}$ appartiene a E se e solo se il sottospazio generato da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ ha dimensione uguale alla dimensione di E. La dimensione del sottospazio generato da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è uguale al rango della matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & k-k^2 \\ 1 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$ le cui colonne danno le componenti di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rispetto alla base canonica. Il minore B formato dalle prime due righe e due colonne di A ha determinante diverso da 0. Dunque $\operatorname{rk} A = 2$ se e solo se gli orlati di B hanno tutti determinante 0.

Gli orlati di B sono $C_1 := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & k-k^2 \end{pmatrix}$ e $C_2 := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$.

Si ha $\det C_1 = 6k^2 - 6k$ e $\det C_2 = 6 - 6k^2$. Dunque $\det C_1$ si annulla per $k = 1$ o $k = 0$, mentre $\det C_2$ si annulla per $k = 1$ o $k = -1$. Quindi $\det C_1$ e $\det C_2$ si annullano entrambi solo per $k = 1$.

2 |

(b) Si consideri il sottospazio $F := \{(x, y, z, w) \mid x + y - z + w = 0\}$. Determinare una base per $E \cap F$.

$(-9, 2, -6, 1)$

Motivazione:

Il sottospazio E è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\alpha(0, 2, 0, 1) + \beta(3, 0, 2, 0) = (3\beta, 2\alpha, 2\beta, \alpha).$$

Il vettore $(3\beta, 2\alpha, 2\beta, \alpha)$ appartiene a F se e solo se $3\beta + 2\alpha - 2\beta + \alpha = 0$, cioè $3\alpha + \beta = 0$, vale a dire $\beta = -3\alpha$.

Dunque $E \cap F = \{(-9\alpha, 2\alpha, -6\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Una base per $E \cap F$ si ottiene scegliendo, ad esempio, $\alpha = 1$.

2 |

(c) La dimensione di $E + F$ è:

4

Motivazione:

Dalla formula di Grassmann abbiamo $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$. Sappiamo che $\dim E = 2$ e $\dim(E \cap F) = 1$. Poiché F è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo in 4 incognite formato da 1 equazione non banale, abbiamo che $\dim F = 4 - 1 = 3$. Pertanto $\dim(E + F) = 2 + 3 - 1 = 4$.

4. Sia A la matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 | |

(a) Detto f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è A, calcolare $f(-2,1,-2)$:

$(4,-2,4)$

Motivazione:

Consideriamo il vettore colonna delle componenti di $(-2,1,-2)$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Facendo il prodotto: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ si ottiene il vettore colonna delle componenti di $f(-2,1,-2)$ rispetto alla base canonica.

2 | |

(b) Per quali valori di k il vettore $(1,0,k)$ è autovettore di f?

$k = 2$

Motivazione:

Il vettore $(1,0,k)$ è autovettore di f se e solo se esiste λ tale che $f(1,0,k) = \lambda(1,0,k)$. Consideriamo il vettore colonna delle componenti di $(1,0,k)$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$. Facendo il prodotto: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2-k \\ -k \end{pmatrix}$ si ottiene il vettore colonna delle componenti di $f(1,0,k)$ rispetto alla base canonica. Dunque

$$f(1,0,k) = (-1, 2-k, -k).$$

Allora $(1,0,k)$ è autovettore di f se e solo se esiste λ tale che $(-1,2-k,-k) = \lambda(1,0,k)$, cioè $-1 = \lambda$, $2-k = 0$ e $-k = \lambda k$. Ciò avviene se e solo se $k = 2$.

3 | |

(c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(-2,1,-2)$, $(1,0,2)$, $(1,1,1)$.

$$B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (1, 4)$, $B := (-2, 1)$ e $C := (2, 7)$.

2	

(a) Determinare un punto D tale che $ABCD$ sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

$\boxed{D = (5, 10)}$

Motivazione:

Il punto medio tra A e C è il punto $M := \left(\frac{1+2}{2}, \frac{4+7}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$. Il punto D è il simmetrico di B rispetto a M: se $D := (x_0, y_0)$ si ha allora $\left(\frac{x_0-2}{2}, \frac{y_0+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$ da cui otteniamo $x_0 = 5$, $y_0 = 10$.

2	

(b) L'area del parallelogramma $ABCD$ è:

6

Motivazione:

Per calcolare l'area del parallelogramma scegliamo come base il lato AB: la sua lunghezza è $\sqrt{(-2-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{18}$. L'altezza relativa al lato AB è uguale alla distanza di C dalla retta r passante per A e B.
La retta r ha equazione $\begin{vmatrix} x-1 & y-4 \\ -2-1 & 1-4 \end{vmatrix} = 0$ cioè $-3x + 3y - 9 = 0$ o, equivalentemente, $x - y + 3 = 0$.
La distanza di C da r è uguale a $\frac{|2-7+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$. Dunque l'area del parallelogramma è uguale a $\sqrt{18}\sqrt{2} = 6$.

3	

(c) Sia s la retta passante per i punti C e D e siano E e F le proiezioni ortogonali su s di A e B rispettivamente. L'area del rettangolo $ABFE$ è uguale a:

6

Motivazione:

Se prendiamo come base il lato AB, vediamo che l'altezza relativa al lato AB è uguale alla distanza di D dalla retta r passante per A e B. Poiché C e D appartengono alla retta s che è parallela a r, i punti C e D sono a distanza uguale da r. Dunque l'altezza del rettangolo $ABFE$ rispetto al lato AB è uguale all'altezza del parallelogramma $ABCD$ rispetto al lato AB. Pertanto $ABFE$ e $ABCD$ hanno la stessa area.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (2, 1, 3)$ e la retta
$$r : \begin{cases} x + y \quad - 2 = 0 \\ x \quad - 2z \quad = 0 \end{cases}$$

2

(a) Il piano π contenente r e passante per il punto A ha equazione:

$5x + 4y - 2z - 8 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si scrive: $\lambda(x + y - 2) + \mu(x - 2z) = 0$.
Imponendo il passaggio per A otteniamo la condizione: $\lambda(2 + 1 - 2) + \mu(2 - 2 \cdot 3) = 0$, vale a dire $\lambda - 4\mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 4$ e $\mu = 1$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π.

2

(b) Il piano σ ortogonale a r e passante per il punto A ha equazione:

$2x - 2y + z - 5 = 0$

Motivazione:

La retta r è ortogonale ai vettori $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, -2)$. Dunque, se (m, n, p) sono parametri direttori di r, si ha $m+n = 0$ e $m-2p = 0$. Si può scegliere allora $(2, -2, 1)$ come parametri direttori di r. Un generico piano ortogonale a r ha allora equazione del tipo $2x-2y+z+d = 0$. Imponendo il passaggio per A otteniamo la condizione $2\cdot2-2\cdot1+3+d = 0$ da cui otteniamo $d = -5$.

3

(c) La distanza tra il punto A e la retta r è:

$\sqrt{5}$

Motivazione:

La distanza tra A e r è uguale alla distanza tra A e la sua proiezione H su r. Il punto H è l'intersezione di r con σ. Dunque H si trova risolvendo il sistema:
$$\begin{cases} x + \ y \quad - 2 = 0 \\ x \quad - 2z \quad = 0 \\ 2x - 2y + \ z - 5 = 0 \end{cases}$$
Risolvendo questo sistema troviamo $(2, 0, 1)$. La distanza tra A e H è $\sqrt{(2-2)^2 + (0-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$.