COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (1, -2)$ e la circonferenza $\gamma : (x-2)^2 + (y+4)^2 = 4$. Allora:

2 (a)
☒ per il punto A passano due rette tangenti distinte alla circonferenza γ
☐ per il punto A passa un'unica retta tangente alla circonferenza γ
☐ per il punto A non passano rette tangenti alla circonferenza γ

Motivazione:

La circonferenza γ ha centro $C := (2, -4)$ e raggio 2. La distanza di A da C è uguale a $\sqrt{(2-1)^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{5}$, che è maggiore di 2. Dunque il punto A è esterno alla circonferenza e, perciò, per esso passano due rette distinte tangenti alla circonferenza γ.

2 (b) Il segmento congiungente A con il centro C di γ interseca la circonferenza γ?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

Il segmento di estremi A e C interseca la circonferenza γ perché i punti A e C sono uno esterno e l'altro interno alla circonferenza.

2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e siano E ed F due sottospazi di V con $\dim E = 3$ e $\dim F = 2$. Inoltre F **non** è contenuto in E.

2	

(a) La somma $E + F$ è diretta?

☐ sicuramente sì
☒ sicuramente no
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se $E + F$ è diretta o no

Motivazione:

La somma $E + F$ è diretta se $E \cap F = \{0\}$.
Per la formula di Grassmann sappiamo che $\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F)$, cioè $\dim(E \cap F) = 5 - \dim(E + F)$.
Poiché $E + F$ è un sottospazio di V, la dimensione di $E + F$ è al massimo 4, e, pertanto, $E \cap F$ ha dimensione almeno 1.

2	

(b) Vale l'uguaglianza $E + F = V$?

☒ sicuramente sì
☐ sicuramente no
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se $E + F = V$ o no

Motivazione:

Sappiamo che valgono le inclusioni $E \subseteq E + F \subseteq V$. Dunque $\dim E \leq \dim(E + F) \leq \dim V$, cioè $3 \leq \dim(E + F) \leq 4$.
Se $E + F$ non fosse uguale a V, avremmo $\dim(E + F) = 3$ e quindi $E + F = E$.
Poiché la somma $E + F$ contiene F avremmo allora che E contiene F. Ma ciò è contrario all'ipotesi che F non sia contenuto in E. Dunque $E + F = V$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato, al variare del parametro reale k, il sottoinsieme E_k di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid 2x + (k^2 + k)y + 3z = k^2 - 1\}$$

| 2 | |

(a) Determina i valori di k per cui E_k è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$:

Per ogni k

Motivazione:

Il sottoinsieme E_k è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare nelle incognite x, y e z, qualunque sia k.

| 2 | |

(b) Determina i valori di k per cui E_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$k = 1$ e $k = -1$

Motivazione:

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema lineare è omogeneo. Nel caso in questione ciò avviene se e solo se $k^2 - 1 = 0$.

Scegli uno dei valori di k determinati al punto b e utilizzalo nel resto dell'esercizio

Valore di k scelto: $k = 1$

| 3 | |

(c) Determina una base per un sottospazio F supplementare di E_k in $\mathbb{R}^3$.

$(1, 0, 0)$

Motivazione:

Dal momento che E_k è definito dall'unica equazione $2x + 2y + 3z = 0$, E_k ha dimensione $3 - 1 = 2$. Un sottospazio F ad esso supplementare in $\mathbb{R}^3$ deve avere dimensione uguale a $3 - 2 = 1$. Dobbiamo quindi trovare un singolo vettore non nullo $\mathbf{v}$ tale che il sottospazio generato da $\mathbf{v}$ abbia intersezione con E_k ridotta al vettore nullo. Basta allora scegliere un vettore $\mathbf{v}$ che non appartiene a E_k. Se $\mathbf{v} := (x_1, y_1, z_1)$ deve essere $2x_1 + 2y_1 + 3z_1 \neq 0$. Si può scegliere, ad esempio, $x_1 = 1$, $y_1 = z_1 = 0$.

4. Sia dato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ definito da $f(x, y, z, w) := (x + y, -x - y, -w, z + 2w)$.

2	

(a) Il vettore $\mathbf{v} := (1, 0, 0, 0)$ appartiene all'immagine di f?

☐ sì ☒ no

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f se e solo se esiste (x, y, z, w) in $\mathbb{R}^4$ tale che $f(x, y, z, w) = (1, 0, 0, 0)$, cioè $(x+y, -x-y, -w, z+2w) = (1, 0, 0, 0)$. Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene dunque all'immagine di f se e solo se il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x - y = 0 \\ -w = 0 \\ z + 2w = 0 \end{cases}$$

Notiamo subito che il sistema non è risolubile: infatti dalla prima equazione dovrebbe essere $x + y = 1$ mentre dalla seconda equazione dovrebbe essere $x + y = 0$.

3	

(b) Determina gli autovalori di f e, per ciascuno di essi una base per il corrispondente autospazio. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(-1, 1, 0, 0)$
1	$(0, 0, -1, 1)$

2	

(c) f è diagonalizzabile?

☐ sì ☒ no

Motivazione:

La somma delle dimensioni degli autospazi è 2, cioè è inferiore alla dimensione di $\mathbb{R}^4$, cioè 4.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano date le tre rette $r : 2x - y - 1 = 0$, $s : 4x + 3y - 17 = 0$ e $t_k : 2x + ky - 6 = 0$, con k parametro reale.

2 (a) Determina tutti i valori di k per cui le rette r, s e t_k appartengono allo stesso fascio di rette.

$k = \frac{2}{3}$

Motivazione:

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x + 3y - 17 = 0 \end{cases}$$

troviamo il punto di intersezione delle rette r e s, cioè il punto $(2, 3)$.
Imponendo il passaggio di t_k per questo punto troviamo la condizione $4 + 3k - 6 = 0$ da cui ricaviamo $k = \frac{2}{3}$.

2 (b) Determina il valore di k per cui le rette r e t_k sono ortogonali.

$k = 4$

Motivazione:

Il vettore $(2, -1)$ è ortogonale a r, il vettore $(2, k)$ è ortogonale a t_k. Imponendo l'ortogonalità tra questi due vettori otteniamo la condizione $2 \cdot 2 - 1 \cdot k = 0$, da cui segue $k = 4$.

Nel resto dell'esercizio utilizza il valore di k determinato al punto (b) (r e t_k ortogonali).

3 (c) L'insieme dei punti interni al triangolo T individuato dalle rette r, s e t_k è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 > 0 \\ 4x + 3y - 17 < 0 \\ x + 2y - 3 > 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $A := (1, 3, 2)$, la retta $r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ e la retta $s : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$

3

(a) Il piano π passante per il punto A e parallelo sia a r che a s ha equazione:

$7x + 4y - 2z - 15 = 0$

Motivazione:

La retta r è ortogonale ai vettori $(1, 1, 1)$ e $(1, 0, -2)$. Dunque, se (m, n, p) sono parametri direttori di r, si ha $m + n + p = 0$ e $m - 2p = 0$. Si può scegliere allora $(2, -3, 1)$ come parametri direttori di r.
La retta s ha parametri direttori $(-2, 4, 1)$. Il piano π è dunque parallelo ai vettori $(2, -3, 1)$ e $(-2, 4, 1)$. La sua equazione cartesiana è, dunque, $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, che, sviluppata, dà l'equazione cercata.

2

(b) Il piano σ contenente r e ortogonale a π ha equazione:

$2x + 11y + 29z - 11 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si scrive: $\lambda(x + y + z - 1) + \mu(x - 2z) = 0$.
Tale fascio può essere riscritto come: $(\lambda + \mu)x + \lambda y + (\lambda - 2\mu)z - \lambda = 0$.
Questo piano è ortogonale al piano π se e solo se i vettori $(\lambda + \mu, \lambda, \lambda - 2\mu)$ e $(7, 4, -2)$ sono ortogonali. Otteniamo così la condizione: $7(\lambda + \mu) + 4\lambda - 2(\lambda - 2\mu) = 0$, cioè $9\lambda + 11\mu = 0$. Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = 11$ e $\mu = -9$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano σ.

2

(c) La proiezione ortogonale di r sul piano π ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 7x + 4y - 2z - 15 = 0 \\ 2x + 11y + 29z - 11 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La proiezione ortogonale della retta r su π si ottiene intersecando il piano π con il piano che passa per r ed è ortogonale a π cioè il piano σ.