COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano A e B due matrici quadrate. Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo che è autovettore di A relativamente all'autovalore 3 ed è autovettore di B relativamente all'autovalore -2.

2 (a) Si consideri la matrice $4AB$.

☒ il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di $4AB$ relativamente all'autovalore $\boxed{-24}$
☐ il vettore $\mathbf{v}$ non è autovettore di $4AB$
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di $4AB$ oppure no

Motivazione:

Sappiamo che $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$ e che $B\mathbf{v} = -2\mathbf{v}$. Dunque

$$(4AB)\mathbf{v} = 4A(B\mathbf{v}) = 4A(-2\mathbf{v}) = -8(A\mathbf{v}) = -8(3\mathbf{v}) = -24\mathbf{v}.$$

2 (b) Si consideri la matrice B^2.

☒ il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di B^2 relativamente all'autovalore $\boxed{4}$
☐ il vettore $\mathbf{v}$ non è autovettore di B^2
☐ i dati assegnati non permettono di stabilire se il vettore $\mathbf{v}$ è autovettore di B^2 oppure no

Motivazione:

Sappiamo che $B\mathbf{v} = -2\mathbf{v}$. Dunque

$$B^2\mathbf{v} = B(B\mathbf{v}) = B(-2\mathbf{v}) = -2B\mathbf{v} = -2(-2\mathbf{v}) = 4\mathbf{v}.$$

2. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento euclideo. Siano dati i tre punti non allineati $A := (1, 5)$, $B := (3, 1)$ e $P := (x_0, y_0)$. Sia γ la circonferenza passante per A, B e P.

2 (a) Il segmento di estremi A e B è un diametro di γ se e solo se: (dà una condizione algebrica)

$x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 6y_0 + 8 = 0$

Motivazione:

I punti A e B sono gli estremi di un diametro se e solo se il triangolo APB è rettangolo in P. La retta passante per A e P ha vettore direttore $(x_0 - 1, y_0 - 5)$. La retta passante per B e P ha vettore direttore $(x_0 - 3, y_0 - 1)$. Imponendo l'ortogonalità tra i vettori direttori così trovati otteniamo la condizione:

$$(x_0 - 1)(x_0 - 3) + (y_0 - 5)(y_0 - 1) = 0,$$

cioè

$$x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 6y_0 + 8 = 0.$$

2 (b) Il segmento di estremi A e P è un diametro di γ se e solo se: (dà una condizione algebrica)

$x_0 - 2y_0 - 1 = 0$

Motivazione:

I punti A e P sono gli estremi di un diametro se e solo se il triangolo ABP è rettangolo in B. La retta passante per A e B ha vettore direttore $(3 - 1, 1 - 5) = (2, -4)$. La retta passante per B e P ha vettore direttore $(x_0 - 3, y_0 - 1)$. Imponendo l'ortogonalità tra i vettori direttori così trovati otteniamo la condizione:

$$2(x_0 - 3) - 4(y_0 - 1) = 0,$$

cioè

$$x_0 - 2y_0 - 1 = 0.$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato al variare del parametro reale k il sistema lineare nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 \\ x + y + 3z = k \\ x + y + 2kz = 2 \end{cases}$$

| 3 | |

(a) Per quali valori di k il sistema ha esattamente una soluzione?

$k \neq 1$ e $k \neq \frac{3}{2}$

Motivazione:

La matrice del sistema è $A := \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2k \end{pmatrix}$. Il determinante di A è $-2k^2 + 5k - 3$ che si annulla per $k = 1$ e $k = \frac{3}{2}$. Se k è diverso da questi due valori il sistema è Crameriano ed ha, quindi, una sola soluzione. Se $k = 1$ oppure $k = \frac{3}{2}$ la matrice A ha rango minore r di 3: pertanto o il sistema non è risolubile, oppure le soluzioni dipendono da $3 - r$ parametri, sono cioè più di una.

| 2 | |

(b) Per $k = 1$ il sistema è risolubile? Se sì, scrivere le soluzioni del sistema, se no, spiegare perché.

☒ Il sistema è risolubile. Le soluzioni sono: $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$ con t parametro reale.	☐ Il sistema non è risolubile:

| 2 | |

(c) Per $k = \frac{3}{2}$ il sistema è risolubile? Se sì, scrivere le soluzioni del sistema, se no, spiegare perché.

☐ Il sistema è risolubile. Le soluzioni sono: $\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$	☒ Il sistema non è risolubile: Per $k = \frac{3}{2}$ il sistema diviene $\begin{cases} x + \frac{3}{2}y + z = 3 \\ x + y + 3z = \frac{3}{2} \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$ La seconda e la terza equazione sono chiaramente incompatibili.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2

(a) Determinare rispetto a quale autovalore il vettore $(2, 1, 1)$ è autovettore di f.

2

Motivazione:

Calcoliamo $f(2, 1, 1)$. Consideriamo il vettore colonna delle componenti di $(2, 1, 1)$ rispetto alla base canonica: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Facendo il prodotto: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ si ottiene il vettore colonna delle componenti di $f(2, 1, 1)$ rispetto alla base canonica. Dunque

$$f(2, 1, 1) = (4, 2, 2),$$

cioè

$$f(2, 1, 1) = 2(2, 1, 1).$$

2

(b) Determinare una base del nucleo di f.

$(1, 0, 1)$

Motivazione:

Si risolve il sistema associato alla matrice A.

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono $(t, 0, t)$ al variare di t in $\mathbb{R}$. Otteniamo una base del nucleo prendendo, ad esempio, $t = 1$.

3

(c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $(2, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, -1, 1)$.

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (1, 5)$ e $B := (2, 3)$ e la retta $r : 8x - 11y + 27 = 0$.

2 (a) Determina un punto C sulla retta r in modo tale che il triangolo ABC sia rettangolo in B.

$\boxed{C = (-2, 1)}$

Motivazione:

La retta s passante per A e B ha parametri direttori $(2-1, 3-5) = (1, -2)$. Una retta ortogonale a s ha quindi parametri direttori $(2, 1)$. La retta n passante per B e ortogonale a s ha allora equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta r troviamo l'equazione $8(2+2t) - 11(3+t) + 27 = 0$ che ha soluzione $t = -2$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo le coordinate del punto C.

2 (b) Determina un punto D sulla retta r in modo tale che il triangolo ABD sia isoscele con base AB (cioè $AD = BD$).

$\boxed{D = \left(\frac{7}{2}, 5\right)}$

Motivazione:

Il punto D deve appartenere all'asse del segmento AB cioè alla retta l passante per il punto medio M di A e B e ortogonale alla retta s passante per A e B.
Dal punto precedente sappiamo che l ha parametri direttori $(2, 1)$. Il punto medio M di A e B ha coordinate $\left(\frac{1+2}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$. La retta l ha allora equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} + 2t \\ y = 4 + t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta r troviamo l'equazione $8\left(\frac{3}{2} + 2t\right) - 11(4+t) + 27 = 0$ che ha soluzione $t = 1$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di l troviamo le coordinate del punto D.

3 (c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e D è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x + y - 7 > 0 \\ 4x - 3y + 1 < 0 \\ y - 5 < 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (1, 2, -3)$ e il piano $\pi : 2x - 3y + 4z - 13 = 0$.

2

(a) La sfera S centrata in P e tangente il piano π ha equazione:

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 29$

Motivazione:

La sfera S ha raggio uguale alla distanza di P da π. La distanza di P da π è:

$$\frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4(-3) - 13|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \sqrt{29}.$$

Dunque l'equazione della sfera è: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 29$.

2

(b) Il punto H di tangenza tra π e S ha coordinate:

$H = (3, -1, 1)$

Motivazione:

Il punto H è la proiezione ortogonale di P su π. La retta s passante per P e ortogonale al piano π ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = & 1 + 2t \\ y = & 2 - 3t \\ z = & -3 + 4t \end{cases}$ Intersecando questa retta con il piano π troviamo l'equazione

$$2(1 + 2t) - 3(2 - 3t) + 4(-3 + 4t) + 3 = 0,$$

ovvero $29t - 29 = 0$, la cui soluzione è 1. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di s troviamo le coordinate del punto H.

3

(c) Trovare le equazioni di tutti i piani paralleli a π la cui intersezione con S è una circonferenza di raggio 2:

$2x - 3y + 4z + 16 + 5\sqrt{29} = 0 \qquad 2x - 3y + 4z + 16 - 5\sqrt{29} = 0$

Motivazione:

Intersecando S con un piano distante d dal centro della sfera S si ottiene una circonferenza di raggio $\sqrt{29 - d^2}$ (se $d > \sqrt{29}$ l'intersezione tra piano e circonferenza è vuota). Dall'equazione $\sqrt{29 - d^2} = 2$ ricaviamo allora $d = 5$.
Il generico piano parallelo al piano π ha equazione $2x - 3y + 4z + k = 0$. Imponendo che la distanza di questo generico piano da P sia $d = 5$ otteniamo l'equazione:

$$\frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4(-3) + k|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}} = 5,$$

cioè $|k - 16| = 5\sqrt{29}$ le cui soluzioni sono $16 + 5\sqrt{29}$ e $16 - 5\sqrt{29}$.