COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Si consideri la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 := (1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 := (1,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 := (1,1,1)$. Si considerino i vettori $\mathbf{w}_1 := (1,3,1,2)$ e $\mathbf{w}_2 := (2,1,3,-1)$ di $\mathbb{R}^4$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $f(\mathbf{v}_1) := \mathbf{w}_1$, $f(\mathbf{v}_2) := \mathbf{w}_2$, $f(\mathbf{v}_3) := 2\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2$.

2	

(a) L 'applicazione f è suriettiva?

☐ Sì ☒ No ☐ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilire se f è suriettiva o no

Motivazione:

La dimensione di $\mathbb{R}^3$, spazio di partenza, è minore della dimensione di $\mathbb{R}^4$, spazio di arrivo. Dunque non esistono applicazioni lineari suriettive da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$. In particolare f non è suriettiva.

2	

(b) L 'applicazione f è iniettiva?

☐ Sì ☒ No ☐ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilire se f è iniettiva o no

Motivazione:

L'immagine di f è generata da $f(\mathbf{v}_1)$, $f(\mathbf{v}_2)$ e $f(\mathbf{v}_3)$. Poiché $f(\mathbf{v}_3)$ è combinazione lineare di $f(\mathbf{v}_1)$ e $f(\mathbf{v}_2)$, l'immagine di f può essere generata solo da $f(\mathbf{v}_1)$ e $f(\mathbf{v}_2)$. L'immagine di f ha allora dimensione minore di 3 (più precisamente ha dimensione 2): dunque f non è iniettiva perché altrimenti l'immagine di f avrebbe dimensione uguale alla dimensione dello spazio di partenza, cioè 3.

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo siano date le rette:

$$r_k : \begin{cases} x = 1 + kt \\ y = 2 - kt \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.

2	

(a) Per quali valori di k le rette r_k e s sono parallele?

4

Motivazione:

La retta r_k ha parametri direttori $(k, -k, 2)$.
La retta s ha equazioni parametriche

$$s : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

e quindi ha parametri direttori $(2, -2, 1)$.
Le rette r_k e s sono parallele se e solo se hanno parametri direttori proporzionali il che avviene se e solo se $k = 4$.

2	

(b) Per che valori di k le rette r_k e s sono ortogonali?

$-\frac{1}{2}$

Motivazione:

Conosciamo già, dal punto precedente, i vettori direttori per r_k e s. Le rette sono ortogonali se e solo se il prodotto scalare dei loro vettori direttori è nullo cioè se e solo se:

$$k \cdot 2 - k(-2) + 2 \cdot 1 = 0$$

cioè se e solo se $k = -\frac{1}{2}$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$f(a+bx+cx^2) := 2a + (a+b+c)x - ax^2.$$

1 (a) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 (b) Determinare una base del nucleo di f.

$x - x^2$

Motivazione:

Un polinomio $a + bx + cx^2$ appartiene al nucleo di f se e solo se

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ a+b+c = 0 \\ -a = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova che il nucleo di f è formato da tutti e soli i polinomi della forma $bx - bx^2$. Una base per il nucleo è allora formata dal polinomio $x - x^2$.

2 (c) Stabilire se il polinomio $p(x) := 2 + x - x^2$ è autovettore di f e in caso affermativo rispetto a quale autovalore.

☒ il polinomio $p(x)$ è autovettore di f relativamente all'autovalore $\boxed{2}$

☐ il polinomio $p(x)$ non è autovettore di f

Motivazione:

Si ha $f(2+x-x^2) = 2 \cdot 2 + (2+1-1)x - 2x^2 = 4 + 2x - 2x^2$.
Poiché $f(p(x)) = 2p(x)$, il polinomio $p(x)$ è autovettore di f rispetto all'autovalore 2.

2 (d) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3[x]$ formata dai polinomi $x - x^2$, $2 + x - x^2$, x.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai tre vettori $\mathbf{u} := (1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{v} := (0, 3, 0, 2)$ e $\mathbf{w} := (k^2, 0, 2, k - k^2)$, dove k è un parametro reale.

2

(a) Determinare i valori di k per cui si ha $\dim E < 3$.

1

Motivazione:

La dimensione di E è uguale al rango della matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & k-k^2 \end{pmatrix}$ le cui colonne danno le componenti di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ rispetto alla base canonica. Il minore B formato dalle prime due righe e due colonne di A ha determinante diverso da 0. Dunque $\operatorname{rk} A < 3$ se e solo se gli orlati di B hanno tutti determinante 0.

Gli orlati di B sono $C_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $C_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & k-k^2 \end{pmatrix}$.

Si ha $\det C_1 = 6 - 6k^2$ e $\det C_2 = 3k - 3k^2$. Dunque $\det C_1$ si annulla per $k = 1$ o $k = -1$, mentre $\det C_2$ si annulla per $k = 0$ o $k = 1$. Quindi $\det C_1$ e $\det C_2$ si annullano entrambi solo per $k = 1$.

Scegli uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = 1$

1

(b) La dimensione di E è:

2

2

(c) Determinare una base di un sottospazio F supplementare di E in $\mathbb{R}^4$.

$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$

2

(d) Esiste un sottospazio G di $\mathbb{R}^4$ diverso da F e supplementare di E? Se sì, scrivere una base di G, se no, spiegare perché non esiste.

☒ Una base per G è: $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$	☐ Non esiste un sottospazio G con le proprietà richieste. Infatti:

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano sia dato il punto $C := (3, 2)$ e la retta $r : 2x - y - 9 = 0$.

2

(a) La circonferenza γ centrata in C e tangente la retta r ha equazione:

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$

Motivazione:

Il raggio della circonferenza cercata è uguale alla distanza tra C e r. Questa si ottiene dalla formula

$$d(C, r) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}.$$

La circonferenza cercata ha allora equazione $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{5}^2$.

2

(b) Determina il punto di tangenza H tra la retta r e la circonferenza γ.

$H = (5, 1)$

Motivazione:

La retta r è ortogonale al vettore $(2, -1)$. La retta n passante per C e ortogonale a r ha allora equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta r troviamo l'equazione $2(3+2t) - (2-t) - 9 = 0$ che ha soluzione $t = 1$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo le coordinate del punto H.

3

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici C, H e $O := (0, 0)$ è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x + 2y - 7 < 0 \\ x - 5y < 0 \\ 2x - 3y > 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (4, 7, -2)$ e la retta $r : \begin{cases} x + \ \ y - 3z + 1 = 0 \\ x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

2	

(a) La retta s parallela a r e passante per P ha equazioni:

$$\begin{cases} x + \ \ y - 3z - 17 = 0 \\ x - 2y + 2z + 14 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta r è data come intersezione dei piani $\alpha : x+y-3z+1 = 0$ e $\beta : x-2y+2z-2 = 0$. Consideriamo il fascio di piani paralleli a α:

$$x + y - 3z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per P troviamo $4 + 7 - 3(-2) + k = 0$, da cui ricaviamo $k = -17$. Il piano α' parallelo a α e passante per P ha allora equazione $x + y - 3z - 17 = 0$. Consideriamo ora il fascio di piani paralleli a β:

$$x - 2y + 2z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per P troviamo $4 - 2 \cdot 7 + 2(-2) + k = 0$, da cui ricaviamo $k = 14$. Il piano β' parallelo a β e passante per P ha allora equazione $x - 2y + 2z + 14 = 0$. La retta s è l'intersezione di α' e β'.

2	

(b) Il piano π contenente sia r sia s ha equazione cartesiana:

$17x - 10y - 6z - 10 = 0$

Motivazione:

Consideriamo il fascio di piani passanti per r:

$$\lambda(x + y - 3z + 1) + \mu(x - 2y + 2z - 2) = 0.$$

Imponendo il passaggio per P troviamo la condizione $\lambda(4 + 7 - 3(-2) + 1) + \mu(4 - 2 \cdot 7 + 2(-2) - 2) = 0$ cioè $18\lambda - 16\mu = 0$. Prendendo, ad esempio $\lambda = 8$ e $\mu = 9$ troviamo l'equazione del piano contenente r e P. La retta s essendo parallela a r e passante per P è quindi contenuta in questo piano.

3	

(c) La distanza tra r e s è:

$\sqrt{34}$

Motivazione:

Risolvendo il sistema che dà r troviamo le sue equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 4t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3t \end{cases}$

Prendiamo ora un qualunque piano perpendicolare ad r (e quindi anche a s), ad esempio quello passante per P: $\sigma : 4(x - 4) + 5(y - 7) + 3(z + 2) = 0$. Ovviamente l'intersezione di σ con s è il punto P, mentre l'intersezione di σ con r si ottiene risolvendo l'equazione: $4(4t - 4) + 5(-1 + 5t - 7) + 3(3t + 2) = 0$ che ha soluzione $t = 1$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di r troviamo il punto $H := (4, 4, 3)$. Dunque:

$$\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(H, P) = \sqrt{(4 - 4)^2 + (4 - 7)^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{34}$$