COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia dato, al variare del parametro reale $k$, il sottospazio affine $E_k$ di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$E_k := \{(x, y, z) \mid 2x - 3y + 4z = k^2 - k\}$$

2

(a) Determina i valori di $k$ per cui $E_k$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$k = 0$ e $k = 1$

Motivazione:

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema lineare è omogeneo. Nel caso in questione ciò avviene se e solo se $k^2 - k = 0$.

2

(b) Scegli $k_1$ tale che $E_{k_1}$ sia un sottospazio vettoriale e $k_2$ tale che $E_{k_2}$ non sia un sottospazio vettoriale.

Valori scelti: $k_1 = 0$ | $k_2 = 2$

Il sottospazio affine $E_{k_2}$ è parallelo al sottospazio vettoriale $E_{k_1}$?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

L'insieme delle soluzioni di un sistema è un sottospazio affine parallelo al sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato.
Il sottospazio affine $E_{k_2}$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $S : 2x - 3y + 4z = 2$.
Il sistema omogeneo associato a $S$ è $SO : 2x - 3y + 4z = 0$ il cui insieme delle soluzioni è esattamente $E_{k_1}$.

2. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine sia data la retta:

$$r : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 4 - \ \ t \end{cases}$$

| 2 | |
|---|---|

(a) Il segmento di estremi $A := (1, 2)$ e $B := (2, 5)$ interseca la retta $r$?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

Determiniamo l'equazione cartesiana di $r : (x - 4)(-1) = (y - 4)3$ cioè $x + 3y - 16 = 0$.

I due semipiani delimitati da $r$ sono definiti dalle disequazioni $x+3y-16 > 0$ e $x+3y-16 < 0$.

Sostituendo le coordinate di $A$ in $x + 3y - 16$ otteniamo $1 + 3 \cdot 2 - 16 = -9$. Abbiamo un numero negativo, dunque $A$ appartiene al semipiano di disequazione $x + 3y - 16 < 0$. Sostituendo le coordinate di $B$ in $x + 3y - 16$ otteniamo $2 + 3 \cdot 5 - 16 = 1$. Abbiamo un numero positivo, dunque $B$ appartiene al semipiano di disequazione $x + 3y - 16 > 0$.

Il segmento di estremi $A$ e $B$ interseca la retta $r$ perché $A$ e $B$ stanno in semipiani delimitati da $r$ diversi.

| 2 | |
|---|---|

(b) La semiretta di origine $A := (1, 2)$ e contenente $C := (1, 4)$ interseca la retta $r$?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

La retta passante per $A$ e $C$ ha equazioni parametriche:

$$s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + (4 - 2)t \end{cases}$$

I punti della semiretta di origine $A$ e contenente $C$ sono quelli corrispondenti ai valori positivi del parametro $t$.
Intersecando la retta $r$ con la retta $s$ otteniamo l'equazione $1 + 3(2 + 2t) - 16 = 0$ la cui soluzione è $t = \frac{3}{2}$. Poiché questo è un valore positivo, l'intersezione tra $r$ e $s$ è un punto della semiretta di origine $A$ e contenente $C$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo definito da: $f(x, y, z, w) := (x+2z+w, 2x+y+5z, 2x+2y+6z-2w)$.

| 2 | |
|---|---|

(a) Determinare una base dell'immagine $f$.

$(1, 2, 2)$ $(0, 1, 2)$

Motivazione:

La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alle basi canoniche è $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. La dimensione dell'immagine di $f$ è uguale al rango di $A$. Il minore $B$ formato dalle prime due righe e due colonne di $A$ ha determinante diverso da 0.
Gli orlati di $B$ sono $C_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ e $C_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Si ha $\det C_1 = 0$ e $\det C_2 = 0$. Dunque $\operatorname{rk} A = 2$, e, poiché per formare il minore $B$ sono state usate le prime due colonne di $A$, una base per l'immagine di $f$ è formata dai vettori le cui componenti rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono date dalle prime due colonne di $A$.

| 2 | |
|---|---|

(b) Il vettore $\mathbf{v} := (1, 1, 0)$ appartiene all'immagine di $f$?

☒ sì ☐ no

Motivazione:

Al punto precedente abbiamo calcolato una base dell'immagine. Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di $f$ se e solo se è combinazione lineare dei vettori $(1, 2, 2)$ e $(0, 1, 2)$, il che avviene se e solo se $\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La prima matrice ha rango 2. La seconda matrice ha determinante nullo: dunque ha rango 2.

| 3 | |
|---|---|

(c) Esistono due vettori distinti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ di $\mathbb{R}^4$ tali che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{w})$?

☒ sì ☐ no

Motivazione:

Dalla domanda a sappiamo che l'immagine di $f$ ha dimensione 2. Dunque

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim f(\mathbb{R}^3) = 3 - 2 = 1.$$

Poiché $\ker f \neq \{(0, 0, 0)\}$, l'omomorfismo $f$ non è iniettivo, e, perciò esistono vettori distinti aventi la medesima immagine.

4. Sia data la matrice: $A_k := \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 1-k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dove $k$ è un parametro reale.

2 (a) Determinare gli autovalori di $A_k$.

0 1

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di $A_k$ è $\det(A_k - xI) = \begin{vmatrix} -x & k-1 & 1-k \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2$, che si annulla per 0 e 1.

2 (b) Determinare i valori di $k$ per cui $A_k$ è diagonalizzabile.

$k = 1$

Motivazione:

Calcoliamo la dimensione degli autospazi in dipendenza da $k$. Si ha

$$\dim E_0 = 3 - \operatorname{rk}(A_k - 0 \cdot I) = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 1-k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3-2=1 & \text{se } k \neq 1 \\ 3-1=2 & \text{se } k=1 \end{cases}$$

Inoltre si ha

$$\dim E_1 = 3 - \operatorname{rk}(A_k - 1 \cdot I) = 3 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} -1 & k-1 & 1-k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3-2=1,$$

qualunque sia $k$.

Dunque si ha $\dim E_0 + \dim E_1 = \begin{cases} 2 & \text{se } k \neq 1 \\ 3 & \text{se } k = 1 \end{cases}$.

Pertanto $A_k$ è diagonalizzabile se e solo se $k = 1$.

**Scegliere uno degli eventuali valori di $k$ determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzarlo nel resto dell'esercizio:**

Valore di $k$ scelto: $k = 1$

3 (c) Determinare una matrice diagonale $D$ e una matrice invertibile $M$ tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano sia dato il punto $A := (3, 2)$ e la retta $r : 2x + y - 13 = 0$.

| 2 | |
|---|---|

(a) Il simmetrico $B$ di $A$ rispetto a $r$ ha coordinate:

$\boxed{B = (7, 4)}$

Motivazione:

La retta $r$ è ortogonale al vettore $(2, 1)$. La retta $n$ passante per $A$ e ortogonale a $r$ ha allora equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + \phantom{2}t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta $r$ troviamo l'equazione $2(3+2t)+(2+t)-13 = 0$ che ha soluzione $t = 1$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di $n$ troviamo le coordinate del punto $H = (5, 3)$ proiezione di $A$ su $r$. Il punto $B$ cercato è il punto tale che $H$ sia il punto medio di $A$ e $B$. Dunque, se $B = (\bar{x}, \bar{y})$ si ha $\frac{3+\bar{x}}{2} = 5$ e $\frac{2+\bar{y}}{2} = 3$, da cui ricaviamo $\bar{x} = 7$ e $\bar{y} = 4$.

| 2 | |
|---|---|

(b) Determina tutti i punti $C$ tali che $ABC$ sia un triangolo equilatero.

$C_1 = (5 + \sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3}) \qquad C_2 = (5 - \sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$

Motivazione:

La distanza di $A$ da $B$ è $\sqrt{(7-3)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$. I punti cercati devono distare $2\sqrt{5}$ da $A$, devono cioè appartenere alla circonferenza $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 20$. I punti cercati devono inoltre appartenere all'asse del segmento $AB$ cioè alla retta $r$. Risolvendo il sistema $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 20 \\ 2x + y - 13 = 0 \end{cases}$ troviamo l'equazione risolvente $(x-3)^2 + (13-2x-2)^2 = 20$ le cui soluzioni sono $5 + \sqrt{3}$ e $5 - \sqrt{3}$. Corrispondentemente troviamo le coordinate dei punti $C_1$ e $C_2$.

| 3 | |
|---|---|

(c) Fissato uno dei punti $C$ determinati al punto precedente si trovi il perimetro e l'area del triangolo $ABC$

| | |
|---|---|
| $\mathrm{per}(ABC) = 6\sqrt{5}$ | $\mathrm{A}(ABC) = 5\sqrt{3}$ |

Motivazione:

Dal punto precedente sappiamo già che la lunghezza di un lato del triangolo $ABC$ è $2\sqrt{5}$, e, dunque, il perimetro di $ABC$ è $6\sqrt{5}$.

Per calcolare l'area, osserviamo che l'altezza relativa alla base $AB$ è uguale alla distanza di $C$ da $H$, cioè è uguale a $\sqrt{(5+\sqrt{3}-5)^2 + (3-2\sqrt{3}-3)^2} = \sqrt{15}$. Dunque il triangolo $ABC$ ha area uguale a $\frac{2\sqrt{5}\sqrt{15}}{2} = 5\sqrt{3}$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, si considerino i punti $A := (0, 2, 0)$, $B := (1, 3, 3)$, $C := (4, 5, 5)$, e $D := (1, 2, k)$.

2

(a) Determinare i valori di $k$ per cui i punti $A$, $B$, $C$ e $D$ sono complanari:

$k = -4$

Motivazione:

Utilizziamo la formula che dà la complanarità dei quattro punti $A$, $B$, $C$ e $D$:

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 3-2 & 3-0 \\ 4-0 & 5-2 & 5-0 \\ 1-0 & 2-2 & k-0 \end{vmatrix} = 0$$

che dà $-4 - k = 0$ la cui soluzione è $k = -4$.

2

(b) Fissato il valore di $k$ determinato alla domanda precedente, determinare l'equazione del piano passante per i punti $A$, $B$, $C$ e $D$:

$4x - 7y + z + 14 = 0$

Motivazione:

Utilizziamo la formula che dà l'equazione del piano passante per i tre punti $A$, $B$ e $C$:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-0 \\ 1-0 & 3-2 & 3-0 \\ 4-0 & 5-2 & 5-0 \end{vmatrix} = 0$$

cioè $4x - 7y + z + 14 = 0$.

3

(c) La distanza tra il punto $C$ e la retta $r$ passante per $A$ e $B$ è:

$\sqrt{6}$

Motivazione:

La retta $r$ ha parametri direttori $(1 - 0, 3 - 2, 3 - 0) = (1, 1, 3)$ ed equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

Il piano $\pi$ perpendicolare ad $r$ e passante per $C$ ha equazione $1(x-4)+1(y-5)+3(z-5) = 0$. L'intersezione di $\pi$ con $r$ si ottiene risolvendo l'equazione: $(t-4)+(2+t-5)+3(3t-5) = 0$ che ha soluzione $t = 2$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di $r$ troviamo il punto $H := (2, 4, 6)$, proiezione di $C$ su $r$. Dunque:

$$\mathrm{d}(C, r) = \mathrm{d}(C, H) = \sqrt{(4-2)^2 + (5-4)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{6}.$$