COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $f : E \to F$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali con $\dim E = 5$ e $\dim F = 7$. Siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, e $\mathbf{v}_3$ vettori linearmente indipendenti di E tali che $f(\mathbf{v}_3) = 2f(\mathbf{v}_1) + 3f(\mathbf{v}_2)$.

2 (a) L' applicazione lineare f è iniettiva?

☐ Sì ☒ No ☐ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilire se f è iniettiva o no

Motivazione:

Poiché $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, e $\mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti, il vettore $\mathbf{v}_3$ non è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$: in particolare $\mathbf{v}_3 \neq 2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2$. D'altra parte $f(\mathbf{v}_3) = 2f(\mathbf{v}_1)+3f(\mathbf{v}_2) = f(2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2)$. Esistono dunque due vettori diversi che hanno la stessa immagine tramite f e, dunque, f non è iniettiva.

2 (b) L' applicazione lineare f è suriettiva?

☐ Sì ☒ No ☐ I dati assegnati non sono sufficienti a stabilire se f è suriettiva o no

Motivazione:

L'immagine di f ha dimensione al più uguale alla dimensione di E. Poiché $\dim E < \dim F$, l'immagine di f ha dimensione minore della dimensione di F e, quindi, non è uguale a F, cioè f non è suriettiva.

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento affine siano dati la retta $r : \begin{cases} 2x + 3y - 3z + 1 = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$ ed il piano $\pi : 7x + 5y - hz + k = 0$ con h e k parametri reali.

| 2 | |

(a) Per quali valori di h e k la retta r è parallela al piano π?

$h = 4$ k qualsiasi

Motivazione:

La retta r è parallela al piano π se e solo se la retta non è incidente il piano, cioè se e solo se l'intersezione tra retta e piano non è formata esattamente da un punto. L'intersezione tra retta e piano si ottiene risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z + 1 = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 7x + 5y - hz + k = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema in 3 incognite ed ha esattamente una soluzione se la matrice del sistema e la matrice completa del sistema hanno entrambe rango 3: notiamo che se la matrice del sistema ha rango 3 anche la matrice completa del sistema (che è una matrice di tipo $(3, 4)$) ha necessariamente rango 3. La matrice del sistema è $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 7 & 5 & -h \end{pmatrix}$ il cui determinante è $11h - 44$, che si annulla se e solo se $h = 4$. Dunque, se $h \neq 4$ la matrice del sistema ha rango 3 e la retta ed il piano sono incidenti, mentre se $h = 4$ la matrice del sistema ha rango minore di 3 e la retta ed il piano sono paralleli.

| 2 | |

(b) Per quali valori di h e k la retta r giace sul piano π?

$h = 4$ $k = 2$

Motivazione:

Affinché la retta r giaccia sul piano, la retta deve essere innanzitutto parallela al piano, e quindi deve essere $h = 4$. In tal caso la matrice del sistema ha rango 2 ed un minore di ordine 2 invertibile estratto dalla matrice del sistema è, ad esempio, quello formato dalle prime 2 righe e 2 colonne. Questo minore ha, nella matrice completa del sistema, 2 orlati: uno è la matrice A che sappiamo già avere determinante nullo, l'altro è il minore $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & k \end{pmatrix}$ il cui determinante è $22 - 11k$. Dunque, se $k \neq 2$ la matrice completa del sistema ha rango 3 e il piano e la retta hanno intersezione vuota, mentre se $k = 2$ la matrice completa del sistema ha rango 2 e la retta e il piano hanno intersezione dipendente da $3 - 2$ parametri, ovvero l'intersezione tra retta e piano è una retta, cioè r stessa.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Fissato in $V^3(O)$ una base ortonormale $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sia f l'endomorfismo di $V^3(O)$ definito da $f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) := (x + 2y + 3z)\mathbf{e}_1 + (x - 2y - z)\mathbf{e}_2 + (3x + 3z)\mathbf{e}_3$.

| 2 | |

(a) Determinare la dimensione dell'immagine di f.

2

Motivazione:

La matrice dell'endomorfismo rispetto alla base assegnata è $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Le prime 2 colonne di A sono indipendenti e la matrice A ha determinante 0: dunque A ha rango 2. L'immagine di f ha allora dimensione 2.

| 3 | |

(b) Determinare una base ortonormale dell'immagine di f.

$\frac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$

Motivazione:

Sappiamo già che l'immagine ha dimensione 2 e che le prime 2 colonne della matrice rappresentativa di f rispetto alla base assegnata sono indipendenti. Dunque l'immagine di f è generata da $f(\mathbf{e}_1)$ e $f(\mathbf{e}_2)$ cioè da $\mathbf{u} := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} := 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$. Determiniamo una base ortonormale dello spazio generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Calcoliamo innanzitutto il prodotto scalare di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3) \times (2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 0.$$

Dunque $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ formano una base ortogonale dell'immagine di f: per ottenere una base ortonormale basta dividere ciascuno dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ per la propria norma.

| 2 | |

(c) Determinare una base ortonormale del nucleo di f.

$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$

Motivazione:

Per calcolare il nucleo di f dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice A. Le soluzioni di questo sistema sono le terne del tipo $(h, h, -h)$ al variare di h in $\mathbb{R}$. Scegliendo, ad esempio, $h = 1$, troviamo che una base del nucleo è formata dal vettore $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. Dividendo questo vettore per la propria norma troviamo una base ortonormale del nucleo.

4. Sia data la matrice: $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

| 2 | |

(a) Determinare gli autovalori di A.

0 2

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 4 \\ 1 & -x & 2 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 2x^2$, che si annulla per 0 e 2.

| 3 | |

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di A. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(0, 1, 0)$, $(-2, 0, 1)$
2	$(2, 1, 0)$

Motivazione:

Per calcolare $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0I$, cioè

$$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(-2k, h, k)$ con h e k parametri reali. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$.

Per calcolare $E(2)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 2I$, cioè

$$\begin{cases} 4z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(2h, h, 0)$ con h parametro reale. Una base di $E(2)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

| 2 | |

(c) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $M := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $P := (-7, 1)$ e la circonferenza $\gamma : (x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$. Siano r e s le rette passanti per P e tangenti a γ e siano R e S i punti rispettivi di tangenza tra queste rette e γ.

2

(a) Le rette r e s hanno equazioni cartesiane:

$r : y - 1 = 0 \qquad s : 4x - 3y + 31 = 0$

Motivazione:

Una retta è tangente alla circonferenza γ se la sua distanza dal centro della circonferenza è uguale al raggio. La circonferenza γ ha centro $C := (3, 6)$ e raggio 5. La generica retta passante per P ha equazione $a(x+7) + b(y-1) = 0$. Imponendo che la distanza di questa retta generica da C sia uguale al raggio di γ troviamo la condizione:

$$\frac{|a(3+7) + b(6-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 5$$

equivalente a $3a^2 + 4ab = 0$ le cui soluzioni sono $a = 0$ e $b = -\frac{3}{4}a$, da cui troviamo le equazioni cercate.

2

(b) La bisettrice dell'angolo $\widehat{RPS}$ ha equazione cartesiana

$x - 2y + 9 = 0$

Motivazione:

Il centro della circonferenza γ è equidistante dai lati PR e PS dell'angolo $\widehat{RPS}$. La bisettrice dell'angolo è, quindi, la congiungente il punto P con il centro della circonferenza. La sua equazione può allora scriversi come

$$\begin{vmatrix} x-(-7) & y-1 \\ 3-(-7) & 6-1 \end{vmatrix} = 0$$

che, sviluppata, dà l'equazione cercata.

3

(c) Detto C il centro di γ, i triangoli CPR e CPS hanno la stessa area. Si calcoli l'area di uno dei due.

$\boxed{25}$

Motivazione:

Il triangolo CPR è rettangolo in R. L'ipotenusa CP ha lunghezza uguale alla distanza tra C e P, cioè $\sqrt{(-7-3)^2 + (1-6)^2} = 5\sqrt{5}$. Il cateto CR ha lunghezza uguale al raggio di γ, cioè 5. Per il teorema di Pitagora il lato PR ha allora lunghezza $\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^2 - 5^2} = 10$. L'area del triangolo è allora uguale a $\frac{5 \cdot 10}{2} = 25$.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (3, 4, 0)$ e le rette $r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 - 5t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Sia π il piano parallelo sia a r che a s e passante per P.

2	

(a) Il piano π ha equazione cartesiana:

$2x + y - 3z - 10 = 0$

Motivazione:

La retta r ha vettore direttore $(1, 1, 1)$. La retta s ha vettore direttore $(4, -5, 1)$. Il piano π deve essere parallelo a questi due vettori. La sua equazione è allora:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

che, sviluppata, dà l'equazione cercata.

2	

(b) La distanza tra r e π è:

$\frac{6}{\sqrt{14}}$

Motivazione:

Poiché il piano π è parallelo alla retta r basta calcolare la distanza di un qualsiasi punto di r da π. Ad esempio prendiamo il punto $(2, 6, 2)$ di r: la sua distanza da π è uguale a

$$\frac{|2 \cdot 2 + 6 - 3 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

3	

(c) La distanza tra r e P è:

$\sqrt{6}$

Motivazione:

Il piano σ ortogonale a r e passante per P ha equazione $(x - 3) + (y - 4) + (z - 0) = 0$. Intersecando σ con r troviamo l'equazione: $(2 + t - 3) + (6 + t - 4) + (2 + t - 0) = 0$, la cui soluzione è $t = -1$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di r troviamo il punto $H := (1, 5, 1)$ proiezione ortogonale di P su r. La distanza di P da r è allora la distanza di P da H, cioè $\sqrt{(3-1)^2 + (4-5)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{6}$.