COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano dati i vettori $\mathbf{u} := (1, 2, 1, 1)$ e $\mathbf{v} := (3, 1, 1, 2)$ di $\mathbb{R}^4$.

2 |

(a) Esiste un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 contenente entrambi i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$?

☐ Sì ☒ No

Motivazione:

I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti perché nessuno dei due è multiplo dell'altro. Uno spazio vettoriale che contenga entrambi i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ha allora almeno dimensione 2.

2 |

(b) Esiste un sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 contenente entrambi i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$?

☒ Sì ☐ No

Motivazione:

Consideriamo il vettore $\mathbf{w} := \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Il vettore $\mathbf{w}$ genera un sottospazio E di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1. Il sottospazio affine $\mathbf{u} + E$ è allora un sottospazio affine di dimensione 1 di $\mathbb{R}^4$. Il sottospazio affine $\mathbf{u} + E$ contiene $\mathbf{u}$ (infatti $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0}$) e contiene $\mathbf{v}$ (infatti $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$).

2. Sia fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano. Siano date le tre rette $r: 2x - y - 1 = 0$, $s: x + y - 5 = 0$ e $t_k: kx + 3y - 5 = 0$, con k parametro reale.

2	

(a) Determina tutti i valori di k per cui le rette r, s e t_k appartengono allo stesso fascio di rette.

$k = -2$

Motivazione:

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

troviamo che le rette r e s si intersecano nel punto $(2, 3)$. Imponendo il passaggio di t_k per questo punto troviamo la condizione $2k + 3 \cdot 3 - 5 = 0$ da cui ricaviamo $k = -2$.

2	

(b) Determina tutti i valori di k per cui le rette r, s e t_k delimitano un triangolo rettangolo.

$k = \frac{3}{2}$ o $k = -3$

Motivazione:

Affinché r, s e t_k delimitino un triangolo rettangolo due delle rette debbono essere ortogonali tra loro.
Il vettore $(2, -1)$ è ortogonale a r, il vettore $(1, 1)$ è ortogonale a s ed il vettore $(k, 3)$ è ortogonale a t_k.
Il prodotto scalare dei due vettori $(2, -1)$ e $(1, 1)$ è uguale a $2 \cdot 1 + (-1)1 = 1$, dunque r e s non sono ortogonali.
Il prodotto scalare di $(2, -1)$ per $(k, 3)$ è uguale a $2k + (-1)3 = 2k - 3$. Per $k = \frac{3}{2}$ questo prodotto scalare si annulla, quindi r e t_k sono ortogonali.
Il prodotto scalare di $(1, 1)$ per $(k, 3)$ è uguale a $1k + 1 \cdot 3 = k + 3$. Per $k = -3$ questo prodotto scalare si annulla, quindi s e t_k sono ortogonali.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia dato il sottospazio E di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$E := \{(x, y, z, w) \mid x + y - z - w = 0\}.$$

2	

(a) Determina una base di E.

$(-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$

Motivazione:

Risolvendo l'equazione $x + y - z - w = 0$ si può esprimere, ad esempio, x in funzione di y, z e w ed ottenere così:

$$E = \{(-y + z + w, y, z, w) \mid y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}\}.$$

Ponendo prima $y = 1$, $z = 0$ e $w = 0$, poi $y = 0$, $z = 1$ e $w = 0$ e, infine $y = 0$, $z = 0$ e $w = 1$ otteniamo una base per E.

2	

(b) Sia dato al variare del parametro reale k il vettore $\mathbf{w}_k := (2, k, 1, 0)$ e sia F_k il sottospazio vettoriale generato da $\mathbf{w}_k$. Per quali valori di k si ha che $\mathbb{R}^4 = E \oplus F_k$?

$k \neq -1$

Motivazione:

Affinché sia $\mathbb{R}^4 = E \oplus F_k$ deve essere $E + F_k = \mathbb{R}^4$ e $E \cap F_k = \{\mathbf{0}\}$. Poiché $\mathbf{w}_k \neq \mathbf{0}$, il sottospazio F_k ha dimensione 1 qualunque sia k. Dunque $E \cap F_k$ può avere dimensione 0 o 1: ha dimensione 1 se e solo se E contiene F_k, cioè se e solo se E contiene $\mathbf{w}_k$; quindi $E \cap F_k = \{\mathbf{0}\}$ se e solo se E non contiene $\mathbf{w}_k$. Il vettore $(2, k, 1, 0)$ appartiene a E se e solo se $2 + k - 1 - 0 = 0$ cioè $k = -1$.
Pertanto per $k \neq -1$ si ha $E \cap F_k = \{\mathbf{0}\}$. Poiché E ha dimensione 3, per tali valori di k dalla formula di Grassmann si ha

$$\dim(E + F_k) = \dim E + \dim F_k - \dim(E \cap F_k) = 4 - \dim(E \cap F_k) = 4,$$

e, dunque, $E + F_k = \mathbb{R}^4$.

3	

(c) Detto G il sottospazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{u} := (1, 0, 1, 2)$ e $\mathbf{v} := (1, 2, 2, 1)$ determina una base di $E \cap G$.

$(1, 2, 2, 1)$

Motivazione:

Il sottospazio G è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\alpha(1, 0, 1, 2) + \beta(1, 2, 2, 1) = (\alpha + \beta, 2\beta, \alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta).$$

Il vettore $(\alpha + \beta, 2\beta, \alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta)$ appartiene a E se e solo se $(\alpha + \beta) + 2\beta - (\alpha + 2\beta) - (2\alpha + \beta) = 0$, cioè $2\alpha = 0$, vale a dire $\alpha = 0$.
Dunque $E \cap G = \{(\beta, 2\beta, 2\beta, \beta) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Una base per $E \cap F$ si ottiene scegliendo, ad esempio, $\beta = 1$.

4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che rispetto alla base canonica si rappresenta con $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2	

(a) Il vettore $\mathbf{v} := (1, 1, 0)$ appartiene all'immagine di f? ☐ Sì ☒ No

Motivazione:

Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene all'immagine di f se e solo se esiste un vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tale che $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Questo è equivalente a dire che il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

è risolubile. La prima e la terza equazione sono chiaramente incompatibili: pertanto $\mathbf{v}$ non appartiene all'immagine di f.

3	

(b) Determina una base per ciascun autospazio di f. Utilizza la tabella sottostante. In ciascuna riga scrivi un autovalore differente e una base per il corrispondente autospazio (nota: il numero delle righe già presenti in tabella non è detto che sia uguale al numero degli autovalori effettivamente presenti)

Autovalore λ	Base dell'autospazio $E(\lambda)$
0	$(1, 1, 0), (-1, 0, 1)$
3	$(1, -1, 1)$

Motivazione:

Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x^2 = x^2(3 - x)$, che si annulla per $x = 0$ e $x = 3$.
Per trovare una base di $E(0)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 0 \cdot I$:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h - k, h, k)$ con h e k parametri reali. Una base di $E(0)$ si ottiene ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$.
Per trovare una base di $E(3)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - 3 \cdot I$:

$$\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h, -h, h)$ con h parametro reale. Una base di $E(3)$ si ottiene ponendo $h = 1$.

2	

(c) Determina una matrice diagonale D e una matrice ortogonale M tali che $D = M^{-1}AM$.

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento affine siano dati i punti $A := (3, 1)$, $B := (6, -2)$ e $C := (7, 4)$.

2	

(a) Determina un punto D tale che $ABCD$ sia un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

$\boxed{D = (4, 7)}$

Motivazione:

Il punto medio tra A e C è il punto $M := \left(\frac{3+7}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(5, \frac{5}{2}\right)$. Il punto D è il simmetrico di B rispetto a M: se $D := (x_0, y_0)$ si ha allora $\left(\frac{x_0+6}{2}, \frac{y_0-2}{2}\right) = \left(5, \frac{5}{2}\right)$ da cui otteniamo $x_0 = 4$, $y_0 = 7$.

2	

(b) Determina il semipiano delimitato dalla retta passante per A e B e contenente il punto C.

$\boxed{x + y - 4 > 0}$

Motivazione:

La retta passante per A e B ha equazione cartesiana $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 \\ 6-3 & -2-1 \end{vmatrix} = 0$, cioè $x + y - 4 = 0$. I due semipiani delimitati da questa retta sono descritti dalle disequazioni $x + y - 4 > 0$ e $x+y-4 < 0$. Sostituendo le coordinate di C nel polinomio $x+y-4$ otteniamo $7+4-4 = 7$: poiché il valore così ottenuto è positivo, il semipiano cercato è identificato dalla disequazione $x + y - 4 > 0$.

3	

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x + y - 4 > 0 \\ 3x - 4y - 5 > 0 \\ 6x - y - 38 < 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento euclideo, siano dati il punto $P := (2, 1, 1)$ e il piano $\pi : x + 2y + 2z - 15 = 0$.

2	

(a) La sfera S centrata in P e tangente il piano π ha equazione:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$

Motivazione:

La sfera S ha raggio uguale alla distanza di P da π. La distanza di P da π è:

$$\frac{|2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 15|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3.$$

Dunque l'equazione della sfera è: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

2	

(b) La sfera T centrata in P la cui intersezione con il piano π è una circonferenza di raggio 4 ha equazione:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Motivazione:

Se H è la proiezione di P sul piano π e A è un qualunque punto dell'intersezione γ tra T e π, si ha che PHA è un triangolo rettangolo in H e H è il centro di γ. La lunghezza del cateto PH è uguale alla distanza di P da π cioè 3 (dal punto precedente). La lunghezza del cateto HA è uguale al raggio di γ, cioè 4. L'ipotenusa PA, la cui lunghezza è uguale al raggio di T, ha allora lunghezza uguale a $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Dunque la sfera cercata ha raggio 5 ed ha, quindi, equazione $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$.

3	

(c) Un piano σ parallelo al piano π e diverso da esso, la cui intersezione con la sfera T è una circonferenza di raggio 4 ha equazione cartesiana:

$x + 2y + 2z + 3 = 0$

Motivazione:

Se i due piani π e σ intersecano T in duc circonferenze aventi il medesimo raggio, i due piani devono avere la stessa distanza dal centro di T. Sappiamo già che la distanza di P da π è uguale a 3. Un generico piano parallelo a π ha equazione $x + 2y + 2z + k = 0$. Imponendo che questo piano disti 3 dal punto P otteniamo la condizione

$$\frac{|2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + k|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3.$$

cioè $|6 + k| = 9$ le cui soluzioni sono $k = -15$ corrispondente al piano π e $k = 3$ che fornisce l'equazione del piano cercato.