COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia data la circonferenza γ di centro $C := (3, 1)$ e raggio $2k$ con k numero reale. Sia dato il punto $P := (2, 4)$.

2 | (a) Per quali valori di k per il punto P passano due rette tangenti distinte alla circonferenza γ?

$k < \frac{\sqrt{10}}{2}$

Motivazione:

Per il punto P passano due rette tangenti distinte a γ se e solo se P è esterno a γ, cioè se e solo se la distanza di P dal centro γ è maggiore del raggio di γ. La distanza di P da C è uguale a $\sqrt{(2-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$. Dunque deve essere $\sqrt{10} > 2k$ cioè $k < \frac{\sqrt{10}}{2}$.

2 | (b) Per quali valori di k una delle due tangenti alla circonferenza γ passanti per P è parallela alla retta r di equazione $3x - 4y + 1 = 0$?

$k = \frac{3}{2}$

Motivazione:

La retta s parallela a r e passante per P ha equazione $3x-4y+10 = 0$. Affinché questa retta sia tangente a γ la sua distanza dal centro di γ deve essere uguale al raggio. La distanza di C da s è uguale a $\frac{|3\cdot 3-4\cdot 1+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 3$. Dunque deve essere $3 = 2k$ cioè $k = \frac{3}{2}$.

2. Sia data la matrice a coefficienti reali $A_k := \begin{pmatrix} -2k & 2 & k \\ 2 & 1 & 1 \\ k^2 & 1 & 2k \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale.

2

(a) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}A_kM$ sia diagonale?

$k = 0$ o $k = 1$

Motivazione:

Una matrice è diagonalizzabile con matrice di passaggio ortogonale se e solo se è simmetrica. La matrice A_k è simmetrica se e solo se $k = k^2$ cioè se e solo se $k = 0$ o $k = 1$.

2

(b) Per quali valori di k esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}(A_k+2kI)M$ sia diagonale?

$k = 0$ o $k = 1$

Motivazione:

La matrice $A + 2kI$ è $\begin{pmatrix} 0 & 2 & k \\ 2 & 1+2k & 1 \\ k^2 & 1 & 4k \end{pmatrix}$. Questa matrice è simmetrica se e solo se $k = k^2$ cioè se e solo se $k = 0$ o $k = 1$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z) := (3x - 2y, x + y + 5z, 2x - y + z)$ e sia E il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ così definito $E := \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$.

2

(a) Determina una base del nucleo di f.

$(-2, -3, 1)$

Motivazione:

Risolvendo il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y + 5z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

si trova che il nucleo è formato dai vettori del tipo $(-2t, -3t, t)$ al variare del parametro reale t. Scegliendo, ad esempio, $t = 1$ troviamo che una base del nucleo di f è formata dal vettore $(-2, -3, 1)$.

2

(b) Determina una base dell'immagine di f.

$(3, 1, 2), (-2, 1, -1)$.

Motivazione:

Per il punto precedente il nucleo di f ha dimensione 1: pertanto l'immagine di f ha dimensione $3 - 1 = 2$. La matrice di f rispetto alla base canonica è $A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Basta allora prendere 2 colonne linearmente indipendenti di A, ad esempio le prime 2, e considerare i vettori le cui componenti rispetto alla base canonica sono dati da queste due colonne e cioè i vettori $(3, 1, 2)$ e $(-2, 1, -1)$.

3

(c) Determina un vettore non nullo appartenente a $f(\mathbb{R}^3) \cap E$.

$(-3, 4, -1)$

Motivazione:

Per il punto precedente i vettori di $f(\mathbb{R}^3)$ sono del tipo $\mathbf{v} = h(3, 1, 2) + k(-2, 1, -1)$ per qualche h e k reali, cioè $\mathbf{v} = (3h - 2k, h + k, 2h - k)$. Questo vettore appartiene a E se e solo se $(3h - 2k) + (h + k) + (2h - k) = 0$ cioè se e solo se $6h - 2k = 0$, ovvero $k = 3h$. Dunque $f(\mathbb{R}^3) \cap E$ è formato dai vettori del tipo $(-3h, 4h, -h)$ al variare di h. Scegliendo, ad esempio, $h = 1$ troviamo un vettore come quello cercato.

4. Sia E il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\mathbf{u} := (0, 1, 0, -1)$ e $\mathbf{v} := (1, 2, 1, 0)$. Sia $\mathbf{w}_k := (k, 1, 1, 1)$

2

(a) Per quali valori del parametro reale k il vettore $\mathbf{w}_k$ appartiene ad E?

$k = 1$

Motivazione:

I vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente indipendenti, dunque $\dim E = 2$. Il vettore $\mathbf{w}_k$ appartiene a E se e solo se il sottospazio generato da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}_k$ ha dimensione uguale alla dimensione di E. La dimensione del sottospazio generato da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}_k$ è uguale al rango della matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ le cui colonne danno le componenti di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}_k$ rispetto alla base canonica. Il minore B formato dalla seconda e terza riga e dalle prime due colonne di A ha determinante diverso da 0. Dunque $\operatorname{rk} A = 2$ se e solo se gli orlati di B hanno tutti determinante 0.

Gli orlati di B sono $C_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si ha $\det C_1 = k - 1$ e $\det C_2 = 0$. Quindi $\det C_1$ e $\det C_2$ si annullano entrambi solo per $k = 1$.

2

(b) Per quali valori di k il vettore $\mathbf{w}_k$ è ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard) sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$?

$k = -3$

Motivazione:

Calcoliamo il prodotto scalare di $\mathbf{u}$ per $\mathbf{w}_k$ e di $\mathbf{u}$ per $\mathbf{w}_k$. Si ha

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w}_k = 0 \cdot k + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$$

e

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w}_k = 1 \cdot k + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = k + 3.$$

Questi prodotti scalari si annullano entrambi se e solo se $k = -3$.

Scegli uno degli eventuali valori di k determinati al punto b (se ce n'è più di uno) e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $k = -3$

3

(c) Determina una base ortonormale dello spazio generato da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}_k$.

$$\left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \left(-\tfrac{3}{\sqrt{12}}, \tfrac{1}{\sqrt{12}}, \tfrac{1}{\sqrt{12}}, \tfrac{1}{\sqrt{12}}\right)$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (1, 2)$ e $B := (-1, -2)$. Indichiamo con C e D i due punti del piano tali che ABC e ABD siano triangoli equilateri.

3	

(a) I punti C e D hanno coordinate:

$C = (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \qquad D = (-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Motivazione:

I lati dei triangoli equilateri cercati hanno lunghezza uguale alla distanza di A da B, cioè $\sqrt{(1-(-1))^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{20}$.
I punti C e D devono distare $\sqrt{20}$ sia da A che da B, devono cioè appartenere alle circonferenze $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$ e $(x-(-1))^2 + (y-(-2))^2 = 20$. Mettendo a sistema queste due equazioni troviamo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trovano le coordinate dei due punti.

2	

(b) L'area del quadrilatero $ACBD$ (attenzione all'ordine dei vertici) è uguale a:

$10\sqrt{3}$

Motivazione:

I punti C e D sono simmetrici rispetto alla retta passante per A e B. Rispetto al lato AB i triangoli ABC e ABD hanno altezza uguale alla metà della distanza tra C e D. La distanza tra C e D è uguale a $\sqrt{(2\sqrt{3} - (-2\sqrt{3}))^2 + (-\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{15}$: dunque le altezze cercate sono uguali a $\sqrt{15}$.
Ciascuno dei due triangoli ABC e ABD ha allora area uguale a $\frac{\sqrt{20}\sqrt{15}}{2} = 5\sqrt{3}$. Poiché il quadrilatero $ACBD$ è composto dai due triangoli ABC e ABD la sua area è allora uguale a $10\sqrt{3}$.

2	

(c) Determina l'equazione cartesiana dell'asse del segmento di estremi C e D:

$2x - y = 0$

Motivazione:

L'asse del segmento di estremi C e D è una retta ed è formata da tutti e soli i punti equidistanti da C e da D. Il punto A è equidistante da C e da D. Allo stesso modo il punto B è equidistante da C e da D. Per questo motivo la retta cercata è la retta passante per A e B. La sua equazione cartesiana è allora $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ -1-1 & -2-2 \end{vmatrix} = 0$ che, sviluppata, dà l'equazione cercata.

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano date le rette $r : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 2t \end{cases}$.

2

(a) Il piano π passante per r e parallelo a s ha equazione cartesiana:

$2x - 4y - z + 5 = 0$

Motivazione:

La retta r ha vettore direttore $(2, 1, 0)$. La retta s ha vettore direttore $(3, 1, 2)$. Il piano π deve essere parallelo a questi due vettori e passare per un punto qualunque di r, ad esempio $(-2, 0, 1)$. La sua equazione è allora:

$$\begin{vmatrix} x - (-2) & y - 0 & z - 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

che, sviluppata, dà l'equazione cercata.

2

(b) La distanza tra s e π è:

$\sqrt{21}$

Motivazione:

Poiché il piano π è parallelo alla retta s basta calcolare la distanza di un qualsiasi punto di s da π. Ad esempio prendiamo il punto $(2, -3, 0)$ di s: la sua distanza da π è uguale a

$$\frac{|2 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) - 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = \sqrt{21}$$

3

(c) La retta t, proiezione ortogonale di s sul piano π ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 2x - 4y - z + 5 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Motivazione:

La retta t è l'intersezione del piano π con il piano σ contenente s e ortogonale a π. Per trovare σ servono un suo punto e due vettori ad esso paralleli. Il piano σ passa per tutti i punti di s, prendiamo, ad esempio, $(2, -3, 0)$. Inoltre σ è parallelo al vettore $(3, 1, 2)$ (vettore direttore di s) e al vettore $(2, -4, -1)$ (vettore ortogonale a π). Dunque σ ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - (-3) & z - 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè $7x + 7y - 14z + 7 = 0$ o, equivalentemente, $x + y - 2z + 1 = 0$.