COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 3 ore.
- **Ti sono stati consegnati tre fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo nome, cognome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- I punteggi sono espressi in trentesimi. Un punteggio compreso tra 30 e 32 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi; un punteggio di almeno 33 corrisponde ad un voto di 30 trentesimi e lode.
- Per le risposte utilizza unicamente gli spazi riquadrati già predisposti. Quando richiesto, le risposte vanno motivate brevemente, ma in maniera comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati i punti $A := (4, 3)$ e $B := (7, -1)$ e la retta $r : x - 3 = 0$.

2 (a) Determina un punto C sulla retta r in modo tale che il triangolo ABC sia rettangolo in B.

$\boxed{C = (3, -4)}$

Motivazione:

Il punto generico P_t sulla retta r ha coordinate $(3, t)$. La retta congiungente P_t con B ha vettore direttore $(7 - 3, -1 - t) = (4, -1 - t)$. La retta congiungente A con B ha vettore direttore $(7 - 4, -1 - 3) = (3, -4)$. Imponendo che il prodotto scalare di questi due vettori sia uguale a 0 troviamo la condizione $4 \cdot 3 + (-1 - t)(-4) = 0$ che, risolta, dà $t = -4$. Pertanto $C = (3, -4)$.

2 (b) Determina un punto D sulla retta r in modo tale che il triangolo ABD sia rettangolo in D.

$\boxed{D = (3, 1)}$

Motivazione:

Il punto generico P_t sulla retta r ha coordinate $(3, t)$. La retta congiungente P_t con B ha vettore direttore $(7 - 3, -1 - t) = (4, -1 - t)$. La retta congiungente P_t con A ha vettore direttore $(4 - 3, 3 - t) = (1, 3 - t)$. Imponendo che il prodotto scalare di questi due vettori sia uguale a 0 troviamo la condizione $4 \cdot 1 + (-1 - t)(3 - t) = 0$ vale a dire $t^2 - 2t + 1 = 0$ la cui unica soluzione è $t = 1$. Pertanto $D = (3, 1)$.

2. Sia dato in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale $E := \{(x, y, z, t) \mid 2x + y - z - t = 0\}$.

2	

(a) Determina, nel caso esista, una base di un sottospazio vettoriale F di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

☐ Sì, un sottospazio come F esiste ed ha come base:	☒ No, non esiste un sottospazio come F

Motivazione:

$\mathbb{R}^4 = E \oplus F$ se e solo se $E \cap F = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathbb{R}^4 = E + F$.
Il sottospazio vettoriale E è definito da una singola equazione non banale e ha, quindi, dimensione $4 - 1 = 3$. Ma allora si avrebbe, per la formula di Grassmann:

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)) = 3 + 2 - 0,$$

il che non può essere.

2	

(b) Determina, nel caso esista, una base di un sottospazio vettoriale F di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1 tale che $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

☒ Sì, un sottospazio come F esiste ed ha come base: $(1, 0, 0, 0)$	☐ No, non esiste un sottospazio come F

Motivazione:

Un sottospazio F di dimensione 1 è generato da un singolo vettore non nullo $\mathbf{v}$. Scegliamo $\mathbf{v} \notin E$ (perché altrimenti $E \cap F \neq \{\mathbf{0}\}$). Per la formula di Grassmann abbiamo:

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)) = 3 + 1 - 0 = 4.$$

Poiché l'unico sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 4 è $\mathbb{R}^4$ stesso, abbiamo che $E + F = \mathbb{R}^4$. Sono allora soddisfatte entrambe le condizioni che ci permettono di dire che $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$. Basta dunque scegliere un vettore $\mathbf{v} := (x, y, z, t)$ che non appartiene a E, cioè tale che l'equazione $2x + y - z - t = 0$ non sia soddisfatta, ad esempio $(1, 0, 0, 0)$.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia dato al variare del parametro reale k il sistema lineare nelle incognite x, y e z:

$$\begin{cases} x + 2y + 2kz = 1 \\ x + y + 3z = 2k \\ 2x + ky + 6z = 7 \end{cases}$$

3	

(a) Per quali valori di k il sistema ha esattamente una soluzione?

$k \neq 2$ e $k \neq \frac{3}{2}$

Motivazione:

La matrice del sistema è $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & 6 \end{pmatrix}$. Il determinante di A è $(2-k)(2k-3)$ che si annulla per $k = 2$ e $k = \frac{3}{2}$. Se k è diverso da questi due valori il sistema è Crameriano ed ha, quindi, una sola soluzione. Se $k = 2$ oppure $k = \frac{3}{2}$ la matrice A ha rango minore r di 3: pertanto o il sistema non è risolubile, oppure le soluzioni dipendono da $3 - r$ parametri, sono cioè più di una.

2	

(b) Per $k = 2$ il sistema è risolubile? Se sì, scrivere le soluzioni del sistema, se no, spiegare perché.

☐ Il sistema è risolubile. Le soluzioni sono: $\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$	☒ Il sistema non è risolubile: Per $k = 2$ il sistema diviene $\begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + 6z = 7 \end{cases}$ La seconda e la terza equazione sono chiaramente incompatibili.

2	

(c) Per $k = \frac{3}{2}$ il sistema è risolubile? Se sì, scrivere le soluzioni del sistema, se no, spiegare perché.

☒ Il sistema è risolubile. Le soluzioni sono: $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$ con t parametro reale.	☐ Il sistema non è risolubile:

4. Sia data la matrice $A_k := \begin{pmatrix} 3 & 2k & 3 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3

(a) Per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile? $\boxed{1}$

Motivazione:

Una matrice è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi è uguale al suo ordine (in questo caso a 3).
Poiché la matrice è triangolare, i suoi autovalori sono gli elementi della sua diagonale principale, cioè 1 e 3, qualunque sia k.
Determiniamo, in dipendenza da k, la dimensione degli autospazi:

$$\dim E(1) = 3 - \mathrm{rk}(A_k - 1I) = 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 2 & 2k & 3 \\ 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 1 \\ 1 & \text{se } k \neq 1 \end{cases},$$

$$\dim E(3) = 3 - \mathrm{rk}(A_k - 3I) = 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 2k & 3 \\ 0 & -2 & k-1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1.$$

Dunque $\dim E(1) + \dim E(3) = 3$ se e solo se $k = 1$.

Scegli uno degli eventuali valori di k determinati al punto a (se ce n'è più di uno) e utilizzalo nel resto dell'esercizio:

Valore di k scelto: $\boxed{k = 1}$

4

(b) Determina una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}A_kM$.

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Motivazione:

Per calcolare $E(1)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A_1 - 1I$, cioè

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $\left(-h - \frac{3}{2}k, h, k\right)$ con h e k parametri reali. Una base di $E(1)$ si ottiene, ad esempio, ponendo prima $h = 1$ e $k = 0$ e poi $h = 0$ e $k = 1$, cioè è formata da $(-1, 1, 0)$ e $\left(-\frac{3}{2}, 0, 1\right)$.
Per calcolare $E(3)$ risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A_1 - 3I$, cioè

$$\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ -2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(h, 0, 0)$ con h parametro reale. Una base di $E(3)$ si ottiene, ad esempio, ponendo $h = 1$, ed è formata da $(1, 0, 0)$.
Riportiamo ora sulla diagonale della matrice D gli autovalori di A, ciascuno un numero di volte uguale alla dimensione del corrispondente autospazio. Riportiamo sulle colonne della matrice M le componenti degli autovettori determinati in un ordine coerente con quello con cui abbiamo posto gli autovalori sulla diagonale di D.

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

5. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano siano dati il punto $B := (-1, 7)$ sulla retta $r : 3x - y + 10 = 0$ e il punto $A := (4, 2)$.

2

(a) Determina un punto C sulla retta r in modo tale che il triangolo ABC sia isoscele con base BC (cioè $AB = AC$).

$\boxed{C = (-3, 1)}$

Motivazione:

Poiché il triangolo è isoscele il punto medio dei vertici B e C coincide con la proiezione M di A sulla retta passante per B e C, cioè la retta r.
Per determinare M consideriamo la retta n ortogonale a r e passante per A:

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con la retta r troviamo l'equazione $3(4+3t) - (2-t) + 10 = 0$ che ha soluzione $t = -2$. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo che $M = (-2, 4)$.
Se $C := (x_0, y_0)$ si ha allora $\left(\frac{x_0-1}{2}, \frac{y_0+7}{2}\right) = (-2, 4)$ da cui otteniamo $x_0 = -3$, $y_0 = 1$.

2

(b) Il triangolo ABC ha area:

$\boxed{A(ABC) = 20}$

Motivazione:

Il lato BC ha lunghezza uguale a $\sqrt{(-3-(-1))^2 + (1-7)^2} = 2\sqrt{10}$. L'altezza relativa a questo lato è uguale alla distanza tra A e il punto M determinato al punto precedente ed è, quindi, uguale a $\sqrt{(4-(-2))^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{10}$. L'area cercata è, pertanto, uguale a $\frac{2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}}{2} = 20$.

3

(c) L'insieme dei punti interni al triangolo di vertici A, B e C è definito dal sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3x - y + 10 > 0 \\ x + y - 6 < 0 \\ x - 7y + 10 < 0 \end{cases}$$

6. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano, siano dati il punto $P := (8,3,5)$, la retta $r : \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ 5x + 3y - 5z + 6 = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi : 3x + y + 2z - 9 = 0$.

2	

(a) Il piano σ contenente r e passante per il punto P ha equazione cartesiana:

$x + y - 3z + 4 = 0$

Motivazione:

Il fascio di piani passanti per r si scrive: $\lambda(2x + y - z + 1) + \mu(5x + 3y - 5z + 6) = 0$.
Imponendo il passaggio per P otteniamo la condizione:

$$\lambda(2 \cdot 8 + 3 - 5 + 1) + \mu(5 \cdot 8 + 3 \cdot 3 - 5 \cdot 5 + 6) = 0,$$

vale a dire $15\lambda + 30\mu = 0$.
Sostituendo, ad esempio, i valori $\lambda = -2$ e $\mu = 1$ nell'equazione del fascio di piani, troviamo il piano π.

2	

(b) Determina la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π.

$H = (2,1,1)$

Motivazione:

La retta n passante per P e ortogonale al piano π ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 8 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

Intersecando questa retta con il piano π troviamo l'equazione

$$3(8 + 3t) + (3 + t) + 2(5 + 2t) - 9 = 0,$$

ovvero $14t + 28 = 0$, la cui soluzione è -2. Sostituendo questo valore nelle equazioni parametriche di n troviamo le coordinate del punto H.

3	

(c) La sfera tangente in H al piano π e avente il centro sul piano σ ha equazione cartesiana:

$(x - 8)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 56$

Motivazione:

La sfera cercata ha centro sulla retta ortogonale a π e passante per H, vale a dire sulla retta n determinata al punto precedente. Il punto P appartiene sia a n che al piano σ, quindi è il centro della sfera cercata. Per determinare il raggio della sfera, basta calcolare la distanza di P da H che è uguale a: $\sqrt{(8-2)^2 + (3-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{56}$.